I. Berechnen sie die Häufungspunkte der Folgen:

$$(a)\ a_n = (-1)^n, \qquad (c)\ a_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k$$

$$(b)\ a_n = \frac{n+1}{\sqrt{n^2+1}}, \qquad (d)\ a_n = \frac{(1+(-1)^n)n^3}{n^2-n+1},$$

(e) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, mit $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$, für alle $n \geq 1$ $a_1 = \sqrt{2}$,

(f) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, mit $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$, für alle $n \geq 1, a_1 = a_2 = 1$.

II.

(a) Zeigen Sie, dass für eine beschränkte Folge reeller Zahlen $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gilt

$$\text{(i)}\ \limsup_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} a_k,$$

$$\text{(ii)}\ \liminf_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} a_k.$$

(b) Zeigen Sie, dass $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann konvergiert, wenn

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n$$

und dann ist

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n.$$

III. Der goldene Schnitt $\varphi \in \mathbb{R}$ ist die positive Lösung der Gleichung $x^2 - x - 1 = 0$ und explizit gegeben durch die Formel $\varphi = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$.

(a) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei durch $a_0 = 1$ und

$$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}$$

rekursiv definiert. Zeigen Sie, dass diese Folge gegen den goldenen Schnitt φ konvergiert.
Tipp: *Benutzen Sie die Beziehung $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$ und vollständige Induktion um die Abschätzung*

$$|a_n - \varphi| \leq \frac{1}{\varphi^n}|1-\varphi|$$

zu zeigen.

(b) Die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei durch $b_0 = 1$ und

$$b_{n+1} = \sqrt{1+b_n}$$

rekursiv definiert. Zeigen Sie, dass diese Folge gegen den goldenen Schnitt φ konvergiert.
Tipp: *Benutzen Sie die Beziehung $\varphi = \sqrt{1+\varphi}$ um mit vollständiger Induktion die Abschätzung*

$$|b_n - \varphi| \leq \frac{1}{(\sqrt{1+\varphi})^n}|1-\varphi|$$

zu zeigen.

(c) Es bezeichne $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge der Fibonacci-Zahlen. Diese sind rekursiv definiert durch $f_0 = f_1 = 1$, sowie

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1}.$$

Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \varphi.$$

Die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kann man als Kettenbruch bzw. Kettenwurzel interpretieren:

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}} = \varphi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}$$

IV. Zeigen Sie, dass jede Folge in $\mathbb{R}$ eine monotone Teilfolge besitzt.

Tipp: *Für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiere $b_n = \sup_{k\geq n} a_k$. Dann gilt entweder $a_n = b_n$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ oder $a_n < b_n$ für alle genügend grossen n. Konstruieren sie in beiden Fällen jeweils eine monoton Teilfolge.*

V.

(a) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ und x^* ein Häufungspunkt dieser Folge. Zeigen Sie:

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \leq x^* \leq \limsup_{n\to\infty} x_n$$

(b) Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen in $\mathbb{R}$. Zeigen Sie:

$$\limsup_{n\to\infty} x_n + \liminf_{n\to\infty} y_n \leq \limsup_{n\to\infty}(x_n + y_n) \leq \limsup_{n\to\infty} x_n + \limsup_{n\to\infty} y_n.$$

VI.

(a) Definiere die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$x_n := \frac{n-2^k}{2^k}, \qquad \text{für } 2^k \leq n < 2^{k+1} \text{ und } k = 0,1,2\cdots.$$

Zeigen Sie, dass jedes $x \in [0,1]$ ein Häufungspunkt dieser Folge ist.

(a) Sei $a \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ und bezeichne mit $[na] := \max\{k \in \mathbb{Z} \,|\, k \leq na\}$ die grösste ganze Zahl kleiner gleich na. Zeigen Sie, das für die Folge

$$x_n := na - [na] \in [0,1)$$

jedes $x \in [0,1]$ ein Häufungspunkt ist.

Tipp: *Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es $n > m > 0$ mit $|x_n - x_m| < \varepsilon$. Für $d := n - m$ gilt dann $x_d \in [0,\varepsilon) \cup (1-\varepsilon, 1]$. Betrachte nun die Folgenglieder $x_d, x_{2d}, x_{3d}, \ldots$ um die Behauptung ähnlich wie in (a) zu zeigen.*

Abgabe: Montag, den 30. Oktober 2017.