I. Taylorpolynome Berechnen Sie des Taylorpolynomes der folgenden Funktionen.

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, x \mapsto \cos(x)e^{-y}$, an der Stelle $(x_0, y_0) = (\pi/2, 0)$, bis zur zweiten Ordnung.
2. $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) : xy = 1\} \to \mathbb{R}, x \mapsto 1/(1 - xy)$, an der Stelle $(x_0, y_0) = (0, 0)$, bis zur n Ordnung $n \geq 1$.
3. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \arctan(x^2 y)$ an der Stelle $(x_0, y_0) = 0$, bis zur zweiten Ordnung.
4. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}, z \mapsto \log(|z|^2 + 1)$, an der Stelle $z = 0$, bis zur n Ordnung $n \geq 1$.
5. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (x_1, \cdots, x_n) \mapsto \prod_{i=1}^n x_i$ an der Stelle $x_0 = (2, \cdots, 2)$ bis zur zweiten Ordnung.

II. Extremalewerte (1)**.**

Bestimmen Sie die Lokale Maxima und Minima der folgenden Funktionen (benutzen Sie die Korollar 3.8.7 aus den Skripten der Vorlesung).

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^3 + y^3 + 3xy$.
2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 2xy$.
3. $f : [0, \infty)^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto y(x - 1)e^{-(x^2+y^2)}$.

III. Extremalwerte (2)**.** Wir betrachten das Dreieck

$$\Delta := \{(x, y) \in [0, 9]^2 \mid y \leq 9 - x\}.$$

Sei $f : \Delta \to \mathbb{R}$ die Funktion, die durch

$$f(x, y) = 2 + 2x + 2y - x^2 - y^2$$

gegeben ist. Bestimmen Sie das absolute Maximum und Minimum von f.

IV . Extremalwerte (3)**.** Zeigen dass das Infimum der Integrale

$$\int_0^1 (y'(t)^2 - 1)^2 dt$$

unter der C^1 Funktionen $y : [0, 1] \to \mathbb{R}$ mit $y(0) = y(1) = 0$ ist 0; aber durch keine dieser Funktionen wird das Infimum angenommen.

Hinweis: Beweisen Sie durch Widerspruch.