I. Umordnung von Reihen

(a) Finden Sie eine Umordnung der alternierenden harmonischen Reihe

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots$$

die divergiert.

(b) Gegeben ein beliebiges $r \in \mathbb{R}$, finden Sie eine Umordnung der alternierenden harmonischen Reihe, die gegen r konvergiert.

(c) Eine Reihe heisst bedingt konvergent wenn Sie konvergiert, aber nicht absolut konvergiert. Lösen Sie Aufgabe (b) für eine beliebige bedingt konvergente Reihe.

II. Konvergenzradius Berechnen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

$$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n, \qquad (b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^a}{n!} z^n, \quad \text{mit } a \in \mathbb{Q}, \qquad (c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2^n + 3^n} z^n,$$

$$(d)\ \sum_{n=0}^{\infty} z^{n^2}, \qquad (e)\ \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} z^n, \qquad (f)\ \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) z^n.$$

III. Additionstheorem für Binomialkoeffizienten

(a) Seien $s, t \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{s}{k} \binom{t}{n-k} = \binom{s+t}{n}.$$

(b) Folgern Sie, dass für die Binomialreihen gilt

$$B_s(z) B_t(z) = B_{s+t}(z)$$

mit $|z| < 1$ und

$$B_s(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{s}{n} z^n.$$

(c) Zeigen Sie, dass für $s \in \mathbb{Q}$ und $x \in (-1, 1)$ gilt

$$B_s(x) = (1 + x)^s.$$

IV. Cauchy Produkt, $\sin$ und $\cos$.

Man kann $\sin(z)$ und $\cos(z)$ durch die folgenden Potenzreihen definieren

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1},$$
$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}.$$

(a) Zeigen Sie, dass der Konvergenzradius der Potenzreihen ∞ ist.

(b) Benutzen Sie die das Cauchy-Produkt um daraus direkt die Additionstheoreme zu verifizieren:

$$\sin(z + w) = \cos(z)\sin(w) + \sin(z)\cos(w)$$
$$\cos(z + w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w).$$

V. Rekapitulation Folgen und Reihen ($*$)

(a) Erfinden Sie zu jeder der folgenden Rechenregeln je eine möglichst komplizierte oder allgemeine Folge, deren Grenzwert (bzw. deren Konvergenz). Sie mit der jeweiligen Regel bestimmen können.

- Vertauschung des Limes mit Addition, Multiplikation, Division, $|\cdot|$ etc. (Regeln I, II im Königsberger)
- Sandwichregel
- Monotone Konvergenz

(b) Schauen Sie Beispiele und Aufgaben zur Berechnung von Grenzwerten von Folgen in den Serien und der Vorlesung an, und versuchen einen Algorithmus (oder einen Entscheidungsbaum bzw. Typologie) zu finden, mit dem man den Grenzwert von möglichst vielen der Beispiele berechnen kann.

(c) Erfinden Sie zu jedem der folgenden Kriterien je eine möglichst komplizierte Reihe, deren Konvergenzverhalten Sie mit dem entsprechenden Kriterium bestimmen können.

- Leibnizkriterium
- Majorantenkriterium
- Grenzwertkriterium
- Quotientenkriterium
- Wurzelkriterium
- Teleskopsumme (mit Berechnung des Wertes der Reihe).

(d) Schauen Sie wiederum die behandelten Beispiele von Reihen an, und versuchen Sie einen Algorithmus zu finden, nach dem man das Konvergenzverhalten möglichst vieler Beispiele bestimmen kann. (Insbesondere: Wann wendet man welches Kriterium wie an?)

(e) In der Prüfung müssen Sie in begrenzter Zeit Konvergenz und Grenzwerte von Folgen und Reihen bestimmen können. Suchen Sie Quellen für weitere Beispielaufgaben für Folgen und Reihen, z.B. im Königsberger, im Schaum's (Link s. Webseite) oder in alten Serien und Prüfungen. Überprüfen Sie, ob Ihre Algorithmen von (b) und (d) Ihnen erlauben, diese Aufgaben richtig und schnell zu lösen.

Hinweis für die Assistenten: Diese Aufgabe ist vage, es gibt dazu keine richtige Lösung, insbesondere zu (b) und (d). Die Studenten sollen durch diese Aufgabe zur Rekapitualtion des Stoffes und zum „selbst denken“ angehalten werden.

Abgabe: Montag, den 13. November 2017.