I.

(a) Zeigen Sie, dass für alle $0 \leq a \leq b$ und $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$0 \leq \sqrt[k]{b} - \sqrt[k]{a} \leq \sqrt[k]{b-a} \tag{1}$$

und falls $0 < a < b$ und $k > 1$, so gilt die Relation (1) auch mit $<$.

(b) Folgern sie, dass $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $x \mapsto \sqrt[k]{x}$ eine stetige Funktion ist.

II. Zeigen Sie: Sei $f : [a, b] \to B \subset \mathbb{C}$ stetig und bijektiv. Dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : B \to [a, b]$ stetig.

III. Berechnen Sie im Existenzfall die Grenzwerte von

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x^n}$ mit $n \in \mathbb{N}$, (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$, (c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x - \sqrt{x}}{x + \log(x)}$,

(d) $\lim\limits_{x\to 0+} x^x$, (e) $\lim\limits_{x\to 1+} \log(x) \log(\log(x))$, (f) $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$,

(g) $\lim\limits_{x\to 0} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$, (h) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x \cos(e^x)}{1+x^2}$, (i) $\lim\limits_{x\to\infty} e^{x\sin(x)}$.

IV. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall von $\mathbb{R}$. Eine Abbildung $f : I \to \mathbb{R}$ heisst *Lipschitz-stetig auf* I wenn es eine Konstante $L \geq 0$ gibt, sodass

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

für alle $x, y \in I$. Geometrisch bedeutet dies, dass die Abstandsverzerrung unter der Abbildung f beschränkt ist.

(a) Wiederholung aus der Vorlesung, zeigen Sie, dass jede Lipschitz-stetige Abbildung f insbesondere stetig ist.

(b) Welche der folgenden Abbildungen $f : I \to \mathbb{R}$ ist Lipschitz-stetig, welche ist stetig?

1. $f(x) = x^2$, $I = [0, 1]$,
2. $f(x) = x^2$ $I = \mathbb{R}$,
3. $f(x) = \sqrt{x}$, $I = [0, \infty)$,
4. $f(x) = \begin{cases} 1/x & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$, $I = \mathbb{R}$.

V.

(a) Man zeige, dass für jedes $s \in \mathbb{Q}$ die Funktion

$$f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}, \qquad f(z) = \frac{\overline{z}}{|z|^s}$$

stetig ist.

(b) Für welche $s \in \mathbb{Q}$ kann man f stetig in den Nullpunkt fortsetzen? Ist diese Fortsetzung eindeutig?

Tipp: *Eine stetige Fortsetzung von f ist eine stetige Funktion $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, sodass $F(z) = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}^*$ gilt.*

VI.

Die Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ sei stetig, und es sei $f(0) = f(1)$. Dann gibt es ein $c \in [0, \frac{1}{2}]$, mit

$$f(c) = f\left(c + \frac{1}{2}\right)$$

.

Tipp: *Wende den Zwischenwertsatz auf $h : [0, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) - f(x + \frac{1}{2})$ an.*

Abgabe: Montag, den 20. November 2017.