I.

(a) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$1. \lim_{x\to\infty} \frac{x^x}{e^{nx}} = \infty,$$
$$2. \lim_{x\to\infty} \frac{\log(x)}{\sqrt[n]{x}} = 0.$$

(b) Zeigen Sie, dass für $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ gilt

$$1. \lim_{x\to\infty} x^a = \infty, \qquad 2. \lim_{x\to 0} x^a = 0,$$
$$3. \lim_{x\to\infty} \frac{\log(x)}{x^a} = 0, \qquad 4. \lim_{x\to 0} x^a \log(x) = 0.$$

II. Ziel dieser Aufgabe ist es den folgenden Grenzwert zu zeigen:

$$\log(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots \tag{1}$$

1. In der Vorlesung wurde gezeigt:

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \qquad \text{für } -1 < x < 1. \tag{2}$$

Folgern Sie mit Hilfe des Leibniz Kriteriums die Ungleichung:

$$\left| \log(1+x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \right| \leq \frac{1}{n+1} \qquad \text{für } 0 < x < 1. \tag{3}$$

2. Zeigen Sie, dass (3) auch für $x = 1$ gilt, und folgern Sie hieraus (1).

III. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

$$1.\ \lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}, \qquad 2.\ \lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{x} - 1) \text{ für } x > 0, \qquad 3.\ \lim_{n\to\infty} \left(n + 1 - n\cos\left(\frac{2}{n}\right)\right)^n$$
$$4.\ \lim_{x\to 0} \frac{x}{\arcsin(2x)}, \qquad 5.\ \lim_{x\to 0} \frac{\sinh(x) - x}{x^3}, \qquad 6.\ \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{2\arctan(n)}{n}\right)^n.$$

IV. Für $a > 0$ und $z \in \mathbb{C}$ wurde in der Vorlesung der Ausdruck a^z definiert durch

$$a^z = e^{z \log(a)}.$$

Zeigen Sie die folgenden Identitäten für $a, b > 0$, $x \in \mathbb{R}$, und $z, w \in \mathbb{C}$:

$$1.\ a^0 = 1, \qquad 2.\ a^1 = a, \qquad 3.\ a^{z+w} = a^z a^w,$$
$$4.\ (a^x)^z = a^{xz}, \qquad 5.\ (ab)^z = a^z b^z, \qquad 6.\ |a^z| = a^{\mathrm{Re}(z)}.$$

V. Überprüfen Sie, welche der folgenden (stetigen) Funktionen gleichmässig stetig sind.

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \dfrac{1}{1+x^2},$
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = e^x,$
3. $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right).$

Abgabe: Montag, den 27. November 2017.