Analysis I :
Lösung Schnellübung 1

Aufgabe I.

1. Sei $z \in Z$. Da g surjektiv ist, existiert $y \in Y$ mit $g(y) = z$, und da f surjektiv ist, gibt es $x \in X$ sodass $f(x) = y$ gilt. Dann gilt aber $(g \circ f)(x) = g(y) = z$ und da $z \in Z$ beliebig war ist $g \circ f$ surjektiv.

2. Seien $x_1 \neq x_2 \in X$. Da f injektiv ist folgt $f(x_1) \neq f(x_2)$ und da g ebenfalls injektiv ist folgt $g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$. Insbesondere gilt $(g \circ f)(x_1) \neq (g \circ f)(x_2)$ für alle $x_1 \neq x_2$ in X und somit ist $g \circ f$ injektiv.

3. Sei $z \in Z$. Da $g \circ f$ surjektiv ist, gibt es ein $x \in X$ sodass $(g \circ f)(x) = z$. Insbesondere gilt $g(f(x)) = z$ und folglich ist $f(x) \in Y$ ein Urbild von z unter g. Da z beliebig war ist g surjektiv.

4. Wir beweisen die Behauptung indirekt und zeigen wenn f *nicht* injektiv ist, dann ist auch $g \circ f$ *nicht* injektiv. Dies ist formal äquivalent zu der Aussage aus der Aufgabe. Wenn f nicht injektiv ist, dann gibt es $x_1 \neq x_2$ sodass $f(x_1) = f(x_2)$ gilt. Dann gilt aber $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ oder äquivalent $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$. Also ist $(g \circ f)$ ebenfalls nicht injektiv.

Aufgabe II.

Wir bestimmen für gegebenes $y \in (-1, 1)$ die Menge aller Urbilder $x \in \mathbb{R}$. Diese sind die Lösungen der Gleichung

$$f(x) = y \qquad \Longleftrightarrow \qquad (1 + |x|)y = x \tag{1}$$

Insbesondere folgt, dass x das gleiche Vorzeichen wie y hat.

$y > 0$: Aus (1) folgt $x > 0$ und (1) ist äquivalent zu

$$(1 + x)y = x \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = x(1 - y) \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \frac{y}{1 - y}.$$

$y = 0$: Aus (1) folgt direkt $x = 0$.

$y < 0$: Aus (1) folgt $x < 0$ und (1) ist äquivalent zu

$$(1 - x)y = x \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = x(1 + y) \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \frac{y}{1 + y}.$$

Folglich besitzt die Gleichung (1) für jedes $y \in (-1, 1)$ die eindeutige Lösung $f^{-1}(y) = \frac{y}{1-|y|}$.

Aufgabe III.

1. Ja, denn es gilt:

$$\begin{aligned} f(A \cup B) &= \{y \in Y \mid \exists x \in A \cup B : y = f(x)\} \\ &= \{y \in Y \mid \exists x \in A : y = f(x)\} \cup \{y : \exists x \in B : y = f(x)\} \\ &= f(A) \cup f(B) \end{aligned}$$

2. Nein, betrachte z.B. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 1$, und $A = [0, 1]$ sowie $B = [2, 3]$. Dann gilt $f(A \cap B) = f(\emptyset) = \emptyset$ und $f(A) \cap f(B) = \{1\} \neq \emptyset$.

3. Ja, aus $(A \cap B) \subset A$ folgt sofort $f(A \cap B) \subset f(A)$. Analog folgt $f(A \cap B) \subset f(B)$ und folglich $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

4. Nein, siehe das Beispiel in (b).

Aufgabe IV.

Wir geben zwei Lösungsvarianten an:

Variante 1: Unter Verwendung der Formel $|z|^2 = z\overline{z}$ gilt in komplexer Notation

$$|z|^2 - z|z| + z = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad z(\overline{z} - |z| + 1) = 0$$

und somit $z = 0$ oder $\overline{z} - |z| + 1 = 0$. Falls z die letztere Gleichung löst, folgt $z = |z| - 1 \in \mathbb{R}$, und damit $z = -\frac{1}{2}$.

Variante 2: Schreibe $z = x + \mathbf{i}y$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |z|^2 - z|z| + z &= x^2 + y^2 - x\sqrt{x^2+y^2} - \mathbf{i}y\sqrt{x^2+y^2} + x + \mathbf{i}y \\ &= \left(x^2 + y^2 - x\sqrt{x^2+y^2} - x\right) + \mathbf{i}\left(y - y\sqrt{x^2+y^2}\right). \end{aligned}$$

Folglich ist $|z|^2 - z|z| + z = 0$ genau dann erfüllt wenn

$$x^2 + y^2 - x\sqrt{x^2+y^2} + x = 0 \qquad \text{und} \qquad y - y\sqrt{x^2+y^2} = 0$$

beide erfüllt sind. Die zweite Gleichung gilt falls $y = 0$ oder $x^2 + y^2 = 1$. Falls $x^2 + y^2 = 1$ gilt, ist die erste Gleichung äquivalent zu $1 = 0$ und kann nicht erfüllt sein. Falls $y = 0$ gilt, ist die erste Gleichung äquivalent zu

$$x^2 - x|x| + x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x(x - |x| + 1) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{oder} \quad x = -\frac{1}{2}.$$

Dies liefert die Lösung $z = 0$ sowie $z = -\dfrac{1}{2}$.

Aufgabe V.

1. Sei

$$f(n) = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad g(n) = \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}).$$

Es gilt

$$g(n) = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_{k-1} = f(n) - \sum_{j=0}^{n-1} a_j = f(n) - f(n-1) - a_0$$

aber $f(n) - f(n-1) = a_n$ und folgt

$$g(n) = a_n - a_0.$$

2. Sei

$$f(n) = \prod_{k=1}^{n} a_k, \quad g(n) = \prod_{k=1}^{n} \frac{a_k}{a_{k-1}}.$$

Es gilt

$$g(n) = \frac{\prod_{k=1}^{n} a_k}{\prod_{k=1}^{n} a_{k-1}} = \frac{f(n)}{\prod_{j=0}^{n-1} a_j} = \frac{1}{a_0}\frac{f(n)}{f(n-1)} = \frac{a_n}{a_0}.$$

3. Es gilt

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

also unter Verwendung von 1. gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

4. Unter Verwendung von 2. gilt:

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{n+k}\right) = \prod_{k=1}^{n} \frac{n+k+1}{n+k} = \frac{2n+1}{n+1} = 2 - \frac{1}{n+1}.$$