Aufgabe I.

Es gilt

$$
\begin{aligned}
&(a)\ \frac{1}{z^2(z-1)} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2},\\
&(c)\ \frac{z+1}{(z^2+2z+1)(z+3)} = \frac{1}{(z+1)(z+3)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+3}\right),\\
&(b)\ \frac{z^5+1}{(z+1)^2(z-3)} = z^2+z+6 - \frac{5}{4(z+1)} + \frac{61}{4(z-3)},\\
&(d)\ \frac{z^2-z+3}{(z^2-1)(z+5)} = \frac{1}{4(z-1)} - \frac{5}{8(z+1)} + \frac{11}{8(z+5)}.
\end{aligned}
$$

Aufgabe II.

(a) Es gilt

$$a_n = \frac{n^n}{n!} = \prod_{k=1}^{n} \frac{n}{k} = n \prod_{k=2}^{n} \underbrace{\frac{n}{k}}_{\geq 1} \geq n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

also $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

(b) Es gilt

$$a_n = \frac{3n^2-6n+7}{4n^2+9n-4} = \frac{3-\frac{6}{n}+\frac{7}{n^2}}{4+\frac{9}{n}-\frac{4}{n^2}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{3}{4}$$

(c) Es gilt

$$a_n = \frac{(n+1)^2}{n} - \frac{n^2}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}\left\{(n+1)^3 - n^3\right\} = \frac{3n^2+3n+1}{n(n+1)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 3.$$

(d) Die folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton steigend, weil für alle $n \in \mathbb{N}$

$$a_{n+1} = \underbrace{2^{\frac{1}{2^{n+1}}}}_{>1} a_n > a_n\ (\geq \sqrt{2}) \tag{1}$$

ist. Zeigen wir dass für alle $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n < 2.$$

Beweis durch vollständige Induktion: Für $n = 1$, gilt die Behauptung wegen $a_1 = \sqrt{2} < 2$.
Induktionsschritt: Es gilt

$$a_{n+1} = \sqrt{2a_n} < \sqrt{2\cdot 2} = 2.$$

Nach dem Satz von der monotonen Konvergenz existiert $a \in \mathbb{R}$ so dass

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Somit gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2a_n} = \sqrt{2a}$$

also

$$a = \sqrt{2a} \implies a^2 = 2a \Leftrightarrow a(a-2) = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ oder } a = 2.$$

Folglich, gilt $a = 2$ wegen (1) (da $a \geq \sqrt{2} > 0$).

Aufgabe III.

Da $c = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n$ existieren zu vorgegebenen $\varepsilon > 0$ Zahlen $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, so dass

$$|a_n - c| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N_1$$

$$|c_n - c| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N_2$$

Für $n \geq \max\{N_1, N_2\}$ gilt dass

$$c - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < c + \varepsilon\,,$$

d.h. $|c - b_n| < \varepsilon$. Daraus folgt

$$\lim_{n\to\infty} b_n = c\,.$$

Aufgabe IV.

(a) Wir bezeichnen die linke bzw. rechte Seite der zu beweisenden Gleichung mit

$$LS(N) = \sum_{n=1}^{2N} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\,,$$

$$RS(N) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{N+n} = \sum_{n=N+1}^{2N} \frac{1}{n}\,.$$

Der *Induktionsanfang* $N = 0$ ist klar, da $LS(0) = 0$ und $RS(0) = 0$.

Induktionsschritt $N \to N+1$. Wir berechnen jeweils die Differenzen

$$LS(N+1) - LS(N) = \frac{1}{2N+1} - \frac{1}{2N+2}$$

und

$$RS(N+1) - RS(N) = \frac{1}{2N+2} + \frac{1}{2N+1} - \frac{1}{N+1} = \frac{1}{2N+1} - \frac{1}{2N+2}\,.$$

Da diese Differenzen gleich sind, und nach Induktions-Voraussetzung $LS(N) = RS(N)$, folgt $LS(N+1) = RS(N+1)$.

(b) *Induktionsanfang:* Für $n = 2$ gilt

$$\prod_{k=2}^{2} \frac{2^3-1}{2^3+1} = \frac{2^3-1}{2^3+1} = \frac{7}{9}$$

was dasselbe ist wie

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{2^2+2+1}{2(2+1)}\,.$$

Induktionsschritt: Wir wollen zeigen, dass

$$\prod_{k=2}^{n+1} \frac{k^3-1}{k^3+1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{(n+1)^2+n+2}{(n+2)(n+1)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{n^2+3n+3}{n^2+3n+2}$$

gilt. Wir erhalten also

$$\prod_{k=2}^{n+1} \frac{k^3-1}{k^3+1} = \frac{(n+1)^3-1}{(n+1)^3+1} \cdot \prod_{k=2}^{n} \frac{k^3-1}{k^3+1} = \frac{(n+1)^3-1}{(n+1)^3+1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{n^2+n+1}{n(n+1)}\,,$$

wobei wir wieder im zweiten Schritt die Induktionsverankerung verwendet haben. Wir schreiben nun

$$(n+1)^3 - 1 = n(n^2+3n+3) \quad \text{und} \quad (n+1)^3 + 1 = (n^2+n+1)(n+2)\,.$$

Durch einsetzen und kürzen erhalten wir dann direkt

$$\frac{(n+1)^3-1}{(n+1)^3+1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{n^2+n+1}{n(n+1)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{n^2+3n+3}{(n+2)(n+1)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{n^2+3n+3}{n^2+3n+2}\,,$$

was zu beweisen war.