Analysis I : Lösung Schnellübung 3

Aufgabe I.

Wir übersetzen die Aussage über Reihen zunächst in eine Aussage über Folgen. Bezeichne die Folge der Partialsummen mit

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \qquad t_n = \sum_{k=1}^{n} b_k.$$

Nach Vorraussetzung existieren die Grenzwerte

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n, \qquad t = \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} t_n.$$

Die Behauptung folgt nun aus den Rechenregeln für Grenzwerte von Folgen

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty}(s_n + t_n) = \left(\lim_{n\to\infty} s_n\right) + \left(\lim_{n\to\infty} t_n\right) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) + \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right).$$

Wir wiederholen im folgenden das Argument, obgleich es für die Lösung dieser Aufgabe nicht verlangt wird: Falls

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s \text{ und } \lim_{n\to\infty} t_n = t$$

gilt, existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $|s_n - s| < \varepsilon$ und $|t_n - t| < \varepsilon$ für alle $n > N$ gilt. Dann folgt aber $|s_n + t_n - (s+t)| \leq |s_n - s| + |t_n - t| < 2\varepsilon$ für alle $n > N$ und folglich konvergiert $(s_n + t_n)$ gegen $s + t$.

Aufgabe II.

1. Die Reihe konvergiert nach dem Quotientenkriterium, da

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^4}{n^4}\frac{3^n}{3^{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^4 \frac{1}{3} = \frac{1}{3} < 1.$$

2. Die Reihe konvergiert nach dem Leibnizkriterium: Offenbar ist $a_n = \dfrac{n}{1+n^2}$ eine Folge von positiven Zahlen die gegen Null konvergiert. Für das Leibnizkritierium müssen wir zeigen, dass die Folge monoton fällt:

$$\begin{aligned} a_n \geq a_{n+1} \quad &\iff \quad \frac{n}{1+n^2} \geq \frac{n+1}{1+(n+1)^2} \\ &\iff \quad n(n^2+2n+2) \geq (n+1)(1+n^2) \\ &\iff \quad n^3 + 2n^2 + 2n \geq n^3 + n^2 + n + 1 \\ &\iff \quad n^2 + n \geq 1 \end{aligned}$$

3. Die Reihe konvergiert nach dem Majorantenkriterium: Dazu schätzen wir ab

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{1\cdot 2\cdots n}{n\cdot n\cdots n} = \frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdots\frac{n}{n} \leq \frac{2}{n^2}$$

und damit folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n} \leq 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = 2\,\zeta(2) < \infty$$

wobei die Konvergenz der $\zeta(2)$-Reihe aus der Vorlesung bekannt ist.

4. Die Reihe divergiert nach dem Minorantenkriterium: Dazu schätzen wir ab

$$\frac{n+4}{n^2+1} \geq \frac{n}{n^2+1} \geq \frac{n}{2n^2} = \frac{1}{2n}$$

und damit folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4+n}{n^2+1} \geq \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \infty$$

wobei die Divergenz der harmonischen Reihe aus der Vorlesung bekannt ist.

Aufgabe III.

(a) Wir haben für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} (A_k - A_{k-1}) b_k = \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n} A_{k-1} b_k = \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_n b_n \quad (\text{da } A_0 = 0). \end{aligned}$$

(b) Die Folge $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt, also existiert $C \geq 0$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$|A_n| \leq C.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} |A_k(b_k - b_{k+1})| &\leq C \limsup_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} |b_k - b_{k+1}| \\ &= C \limsup_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} (b_k - b_{k+1}) = C \limsup_{n\to\infty} (b_1 - b_n) = C b_1 < \infty \end{aligned}$$

und $A_n b_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ also wegen (a) konvergiert die Folge S_n, mit

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{k=1}^{\infty} A_k (b_k - b_{k+1}) \in \mathbb{C}.$$

(c) Wir haben

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k = \begin{cases} -1 & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ 0 & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$$

also gilt die Behauptung wegen (b).