Aufgabe I.

Da $\sin(x)$ perodisch Funktion mit Periode 2π ist, können wir im folgenden $x \in (0, 2\pi)$ annehmen.

Mit der Eulerschen Formel (und $\sin(0) = 0$) folgt

$$\sum_{k=1}^{n} \sin(kx) = \operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}\right).$$

Wir erhalten mit der Formel für die geometrische Summe

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = \frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}}.$$

und umformen liefert

$$\begin{aligned}\frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} &= \frac{e^{ix\frac{n+1}{2}}\left(e^{-ix\frac{n+1}{2}} - e^{ix\frac{n+1}{2}}\right)}{e^{i\frac{x}{2}}\left(e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}\right)} = e^{i\frac{n}{2}x} \cdot \frac{\sin\left(-\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(-\frac{x}{2}\right)} \\ &= \left(\cos\left(\frac{nx}{2}\right) + i\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\right)\frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}. \qquad (1)\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\sum_{k=1}^{n} \sin(kx) = \sin\left(\frac{nx}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Bemerkung: Wegen (1) gilt auch

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}\right) = \cos\left(\frac{nx}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Aufgabe II. Falls $x = 0 \pmod{\pi}$ ist die Lösung trivial also können wir im folgenden $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ annehmen. Seien $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ die Folgen

$$a_n = \sin(nx), \qquad A_n = \sum_{k=1}^{n} \sin(kx), \qquad b_n = \frac{1}{n}.$$

Wegen **I.** gilt

$$\sup_{n\geq 1}|A_n| = \sup_{n\geq 1}\left|\sum_{k=0}^{n}\sin(kx)\right| = \sup_{n\geq 1}\left|\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right| \leq \frac{1}{|\sin\left(\frac{x}{2}\right)|} < \infty. \qquad (2)$$

Dann die Folge $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkte ist. Die Folge $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend also gilt die Behauptung wegen (2) und die Abelsche partielle Summation.

Aufgabe III.

1. Für $x > 0$ gilt $|x|/x = 1$ und für $x < 0$ gilt $|x|/x = -1$. Folglich nimmt die Funktion $|x|/x$ in jeder Umgebung von 0 die Werte ± 1 an und der Grenzwert existiert nicht.

2. Mit der dritten binomischen Formel folgt

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2+9-9}{x^2(\sqrt{x^2+9}+3)} \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x^2+9}+3} = \frac{1}{6}.$$

3. Es gilt für alle $y \in \mathbb{R}$, $\cos(y) = 1 - \frac{y^2}{2} + O(y^3)$, also

$$\frac{\cos(2x)-1}{x^2} = \frac{(1 - 2x^2 + O(x^3)) - 1}{x^2} = -2 + O(x) \xrightarrow[x\to 0]{} -2.$$

Aufgabe IV.

Die Einschränkung von f auf die Intervalle $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ sowie $(1, \infty)$ ist offenbar stetig, da f auf jedem dieser Intervalle eine Verkettung von stetigen Funktionen ist. In den Punkten $x = 0$ sowie $x = 1$ berechnen wir die links- bzw. rechtsseitigen Grenzwerte als

$$f(0-) = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0-} 3\sqrt{-x} + 1 = 1$$
$$f(0+) = \lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} cx + d = d$$

sowie

$$f(1-) = \lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-} cx + d = c + d$$
$$f(1+) = \lim_{x\downarrow 1+} f(x) = \lim_{x\to 1+} x^{10} - 1 = 0$$

Die Funktion f ist genau dann an der Stelle $x = 0$ stetig, wenn der Limes $\lim_{x\to 0} f(x)$ existiert und gleich $f(0)$ ist, und dies ist genau dann der Fall wenn $f(0-) = f(0+) = f(0)$ gilt. Somit ist f an der Stelle $x = 0$ genau dann stetig, wenn $d = 1$ gilt. Mit der gleichen Überlegung ist f genau dann an der Stelle $x = 1$, wenn $f(1-) = f(1+) = f(1)$ gilt. Dies liefert die Bedingung $d + c = 0$ bzw. $c = -d$. Es muss also $d = 1$ und $c = -1$ gelten, damit f überall stetig ist.