Aufgabe I.

1. Wir wissen aus der Vorlesung, dass $f(x) := x^3$ differenzierbar ist mit der Ableitung $f'(x) = 3x^2$ (vergleiche Aufgabe 3). Da $f(x) \to \pm\infty$ für $x \to \pm\infty$ gilt und f stetig ist, folgt aus dem Zwischenwertsatz, dass f surjektiv ist. Man sieht leicht, dass f streng monoton wächst und folglich injektiv ist. Damit haben wir gezeigt, dass f bijektiv ist.

2. Wir bezeichnen die Umkehrfunktion mit $f^{-1}(y) := \sqrt[3]{y}$ (wobei wir die Konvention $\sqrt[3]{-y} := -\sqrt[3]{y}$ für $y > 0$ verwenden). Für den Differenzenquotienten an der Stelle $y = 0$ erhalten wir (für $h \neq 0$):

$$\frac{f^{-1}(0+h) - f^{-1}(0)}{h} = \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = |h|^{-\frac{2}{3}}.$$

Für $h \to 0$ strebt dieser Ausdruck gegen ∞ und konvergiert nicht. Folglich ist die Umkehrfunktion f^{-1} in 0 nicht differenzierbar.

Aufgabe II.

(a) Es gilt für alle $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$ye^{\frac{1}{y}} = y\left(1 + \frac{1}{y} + O\left(\frac{1}{y^2}\right)\right) = y + 1 + O\left(\frac{1}{y}\right)$$

also

$$(x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}} = x + 2 - (x+1) + O\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + O\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

(b) Es gilt

$$\sqrt[n+1]{n+1} = e^{\frac{\log(n+1)}{n+1}} = 1 + \frac{\log(n+1)}{n+1} + \frac{\log^2(n+1)}{2(n+1)^2} + O\left(\frac{\log^3 n}{n^3}\right)$$
$$\sqrt[n]{n} = 1 + \frac{\log(n)}{n} + \frac{\log^2(n)}{2n^2} + O\left(\frac{\log^3(n)}{n^3}\right)$$

also

$$\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n} = \frac{n\log(n+1) - (n+1)\log(n)}{n(n+1)} + \frac{n^2\log^2(n+1) - (n+1)^2\log^2(n)}{2n^2(n+1)^2} + O\left(\frac{\log^3(n)}{n^3}\right). \tag{1}$$

Dann gilt

$$n\log(n+1) - (n+1)\log(n) = n\log\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) - (n+1)\log(n) = -\log(n) + n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$$
$$= -\log(n) + 1 + O\left(\frac{1}{n}\right)$$
$$n^2\log^2(n+1) - (n+1)^2\log^2 n = n^2\left(\log^2 n + 2\log(n)\log\left(1+\frac{1}{n}\right) + \log^2\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) - (n+1)^2\log^2 n$$
$$= -2n\log^2(n) + O(n\log(n)) \tag{2}$$

Folglich gilt wegen (1) und (2)

$$\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n} = \frac{-\log(n)+1}{n(n+1)} - \frac{\log^2(n)}{n(n+1)^2} + O\left(\frac{\log^3(n)}{n^3}\right)$$
$$= \frac{-\log(n)}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

und

$$\frac{n^2}{\log(n)}\left(\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n}\right) = -1 + O\left(\frac{1}{\log(n)}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -1.$$

(c) Es gilt für alle $y > -1$

$$\begin{aligned}\sqrt{1+y} &= 1 + \frac{y}{2} - \frac{y^2}{8} + O(y^3)\\ \arctan(y) &= y - \frac{y^3}{3} + O(y^5)\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}&\sqrt{1+2x^2} - 1 = x^2 - \frac{x^4}{2} + O(x^6)\\ &\arctan(\sqrt{1+2x^2}-1) = \arctan\left(x^2 - \frac{x^4}{2} + O(x^6)\right) = x^2 - \frac{x^4}{2} + O(x^6).\end{aligned}$$

Folglich gilt

$$\frac{\arctan(\sqrt{1+2x^2}-1)}{x^4} - \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{2} + O(x^2) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}.$$

III.

(a) Die Funktion f ist differenzierbar über $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ und gilt für alle $x \neq 0$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{x}{(1+x)^2} = \dfrac{1}{(1+x)^2} > 0 \text{ falls } x > 0,\\ \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{x}{(1-x)^2} = \dfrac{1}{(1-x)^2} > 0 \text{ falls } x < 0.\end{cases}$$

also f ist stark monoton steigend und f hat keine lokalen Extrema.

(b) Die Funktion f ist differenzierbar über $(0,\infty) \setminus \{1\}$ und für alle $x \in (0,\infty)\setminus\{1\}$ gilt

$$f'(x) = \frac{1}{\log(x)} - \frac{1}{\log^2(x)} = \frac{\log(x)-1}{\log^2(x)} \begin{cases} > 0 \text{ falls } x > e\\ < 0 \text{ falls } x < e\\ = 0 \text{ falls } x = e.\end{cases}$$

Dann ist die Funktion f stark monoton fallend über $(0,1)$ und $(1,e)$, und stark monoton steigend über (e,∞). Folglich f hat an der Stelle $x = e$ ein lokales Minimum, aber die Minimum ist nicht global, da

$$\lim_{x\uparrow 1} \frac{x}{\log(x)} = -\infty.$$

(c) Es gilt

$$f'(x) = 4x^3 - 3x^2 - x = x(4x^2 - 3x - 1) = 4x(x-1)\left(x + \frac{1}{4}\right) \begin{cases} < 0 \text{ falls } 0 \leq x < 1\\ > 0 \text{, falls } 1 < x \leq 2\\ = 0 \text{ falls } x = 1.\end{cases}$$

Folglich ist die Funktion f stark monoton fallend über $[0,1]$ und stark monoton steigend über $[1,2]$, also f hat an der Stelle $x = 1$ ein globales Minimum. Da $f(0) = -1$ und $f(2) = 5$ folgt dass f hat an der Stelle $x = 2$ ein globales Maximum.