Aufgabe I.

(a) Wir berechnen die allgemeine homogene Lösung

$$y' = x^2 y.$$

Dann gilt Formel

$$\log(y) = \frac{x^3}{3} + C$$

also

$$y(x) = \lambda e^{\frac{x^3}{3}}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Sei $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbar Funktion so dass

$$y_0(x) = \lambda(x) e^{\frac{x^3}{3}}$$

eine Lösung der Differentialgleichung

$$y' - x^2 y = \cos(x) \tag{1}$$

ist. Dann gilt

$$y_0'(x) - y_0(x) = \lambda'(x) e^{\frac{x^3}{3}} = \cos(x).$$

Folglich ist

$$y_0(x) = e^{\frac{x^3}{3}} \int_0^x \cos(t) e^{-\frac{t^3}{3}} dt$$

eine Lösung der Differentialgleichung (1) und ist die allgemeine Lösung

$$y(x) = \left(\lambda + \int_0^x \cos(t) e^{-\frac{t^3}{3}} dt\right) e^{\frac{x^3}{3}}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

(b) Die allgemeine Lösung der homogene Differentialgleichung ist

$$y(x) = \lambda e^x.$$

Sei $y_0(x) = \lambda(x) e^x$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$y' - y = \sin(2x) e^x = \sin(2x) e^x.$$

Dann gilt

$$\lambda'(x) e^x = \sin(2x) e^x$$

und

$$\lambda(x) = \int \sin(2x) dx = -\frac{1}{2} \cos(2x) + C.$$

Folglich gilt

$$y_0(x) = -\frac{1}{2} \cos(2x) e^x$$

und

$$y(x) = \left(\lambda - \frac{1}{2} \cos(2x)\right) e^x.$$

(c) Es gilt $y(x) = \left(\lambda + x^2\right) e^{-x^2}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Aufgabe II.

(a) Es gilt $y(t) = \lambda_1 e^{\sqrt{3}t} + \lambda_2 e^{-\sqrt{3}t} - \frac{1}{4}(\cos(t) + \sin(t))$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

(b) Es gilt $y(t) = \left(\lambda_1 + \frac{1}{2}\log(1+t^2)\right) e^{-2t} + t\,(\lambda_2 - \arctan(t))\, e^{-2t}$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

(c) Es gilt $y(t) = \lambda_1 \cos(t) + \lambda_2 \sin(t) - \frac{\cos(nt)}{n^2-1}$ falls $n \neq 1$ und falls $n = 1$ gilt $y(t) = \lambda_1 \cos(t) + \left(\lambda_2 + \frac{t}{2}\right)\sin(t)$, mit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

Aufgabe III.

(a) Sei f eine differenzierbar Lösung der pseudo-Differentialgleichung

$$f'(x) + f(-x) = e^x. \tag{2}$$

Dann gilt auch für alle $x \in \mathbb{R}$ wegen der Kettenregel

$$\frac{d}{dx}(f(-x)) = -f'(-x) = f(x) - e^{-x}.$$

Dann ist f' differenzierbar und

$$f''(x) = -f'(-x) + e^x = -\left(f(x) - e^{-x}\right) + e^x = -f(x) + e^x + e^{-x}$$

gilt auch dass

$$f'' + f = 2\cosh(x)$$

und

$$f_{\lambda_1,\lambda_2}(x) = \lambda_1 \cos(x) + \lambda_2 \sin(x) + \cosh(x), \;\; \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

Die Funktion f_{λ_1,λ_2} ist eine Lösung der Gleichung (4) genau dann, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$-\lambda_1 \sin(x) + \lambda_2 \cos(x) + \sinh(x) + \lambda_1 \cos(x) - \lambda_2 \sin(x) + \cosh(x) = e^x. \tag{3}$$

Wir haben

$$-\lambda_1 \sin(x) + \lambda_2 \cos(x) + \sinh(x) + \lambda_1 \cos(x) - \lambda_2 \sin(x) + \cosh(x) = (\lambda_1 + \lambda_2)\cos(x) - (\lambda_1 + \lambda_2)\sin(x) + e^x$$

also die Gleichung (3) gilt genau dann, wenn

$$(\lambda_1 + \lambda_2)\cos(x) = (\lambda_1 + \lambda_2)\sin(x)$$

Dann gilt $\lambda_2 = -\lambda_1$ und die allgemeine Lösung der Gleichung (4) ist

$$f(x) = \lambda_1 (\cos(x) - \sin(x)) + \cosh(x), \;\; \lambda_1 \in \mathbb{R}.$$

(b) Sei f eine differenzierbar Lösung der Gleichung

$$f'(x) = f(2-x). \tag{4}$$

Dann gilt

$$\frac{d}{dx}(f(2-x)) = -f'(2-x) = -f(x)$$

und

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(f(2-x)) = -f(x)$$

also existiert $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ so dass

$$f(x) = \lambda_1 \cos(x) + \lambda_2 \sin(x)$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
&f'(x) - f(2-x) = -\lambda_1 \sin(x) + \lambda_2 \cos(x) - \lambda_1 \cos(2-x) - \lambda_2 \sin(2-x)\\
&= -\lambda_1 \sin(x) + \lambda_2 \cos(x) - \lambda_1 \Big(\cos(2)\cos(x) + \sin(2)\sin(x) \Big) - \lambda_2 \Big(\sin(2)\cos(x) - \cos(2)\sin(x) \Big)\\
&= (-\cos(2)\lambda_1 (1-\sin(2))\lambda_2)\cos(x) + (-(1+\sin(2))\lambda_1 + \cos(2)\lambda_2)\sin(x) = 0
\end{aligned}$$

genau dann, wenn

$$\begin{pmatrix} -\cos(2) & 1-\sin(2) \\ 1+\sin(2) & -\cos(2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Dann gilt

$$\det \begin{pmatrix} -\cos(2) & 1-\sin(2) \\ 1+\sin(2) & -\cos(2) \end{pmatrix} = \cos^2(2) - (1-\sin^2(2)) = \cos^2(2) + \sin^2(2) - 1 = 0,$$

und

$$\cos(2)\lambda_2 = (1+\sin(2))\lambda_1.$$

Folglich gilt

$$f(x) = \lambda_1 \left(\cos(x) + \left(\frac{1}{\cos(2)} + \tan(2) \right) \sin(x) \right) = \frac{\lambda_1}{\cos(2)} \left(\cos(2-x) + \sin(x) \right), \ \ \lambda_1 \in \mathbb{R}.$$

(c) Es gilt für alle $h \neq 0$

$$\begin{aligned}
f(x+h) - f(x) &= e^x f(h) + e^h f(x) - f(x)\\
f(h) = f(h+0) &= e^h f(0) + e^0 f(h) = f(h) + e^h f(0).
\end{aligned}$$

Dann gilt $f(0) = 0$ und

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = e^x \frac{f(h)}{h} + f(x)\frac{e^h - 1}{h} = e^x \frac{f(h)-f(0)}{h} + f(x)\frac{e^h-1}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} f'(0)e^x + f(x).$$

Dann ist f eine Lösung der Differentialgleichung

$$f'(x) = f(x) + f'(0)e^x$$

also existiert $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ so dass

$$f(x) = (\lambda_1 + \lambda_2\, x)\, e^x, \ \ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

Damit folgt

$$\begin{cases} f'(0) = \lambda_1 + \lambda_2 \\ f'(x) = (\lambda_1 + \lambda_2)e^x + \lambda_2 x e^x \\ f(x) + f'(0)e^x = (2\lambda_1 + \lambda_2)e^x + \lambda_2 e^x \end{cases}$$

also

$$\lambda_1 = 0.$$

Folglich ist für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$(x+y)e^{x+y} = e^x \cdot (y\, e^y) + e^y \cdot (x\, e^x)$$

und die allgemeine differenzierbar (im Ursprung) Lösung der Gleichung

$$f(x+y) = e^x f(y) + e^y f(x)$$

ist

$$f(x) = \lambda\, x e^x, \ \ \lambda \in \mathbb{R}.$$