Lösung - Serie 8

1. MC-Aufgaben (Online-Abgabe)

1. Sei $z := 2\exp\left(\frac{\pi}{6}i\right) \cdot (5\sqrt{3} + b \cdot i)$. Für welches $b \in \mathbb{R}$ ist z eine reelle Zahl?

(a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

(b) $\sqrt{3}$

(c) $\frac{1}{5\sqrt{3}}$

(d) $5\sqrt{3}$

$\surd$ (e) Keines von diesen.

Es gilt

$$\begin{aligned} z &= 2\exp\left(\frac{\pi}{6}i\right) \cdot (5\sqrt{3} + b \cdot i) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \cdot (5\sqrt{3} + bi) \\ &= 15 + b\sqrt{3}i + 5\sqrt{3}\mathbf{i} - b = (15 - b) + i \cdot (b\sqrt{3} + 5\sqrt{3}). \end{aligned}$$

Die Zahl ist reell, wenn der Imaginärteil verschwindet, und dies ist für $b = -5$ der Fall, welches nicht auftaucht.

Bitte wenden!

2. Sei $z := \sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$. Dann ist z^6 gleich

(a) $64(i\sqrt{2} - \sqrt{2})$.

(b) $-32(i\sqrt{2} - \sqrt{2})$.

$\surd$ (c) $64\exp(i\frac{3}{4}\pi)$.

(d) $64\exp(i\frac{3}{2}\pi)$.

Um uns die Arbeit zu erleichtern, verwenden wir, dass $z^6 = (z^2)^3$. Wir berechnen zuerst z^2 mit Hilfe der binomischen Formel,

$$\begin{aligned} z^2 &= \left(\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^2 + 2i\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2-\sqrt{2}} + \left(i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2 \\ &= 2 + \sqrt{2} + 2i\sqrt{2^2 - (\sqrt{2})^2} - 2 + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Wegen $|z^2| = \sqrt{8+8} = 4$ und $\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4}$ erhalten wir mit Hilfe der Eulerschen Identität die Polarformdarstellung

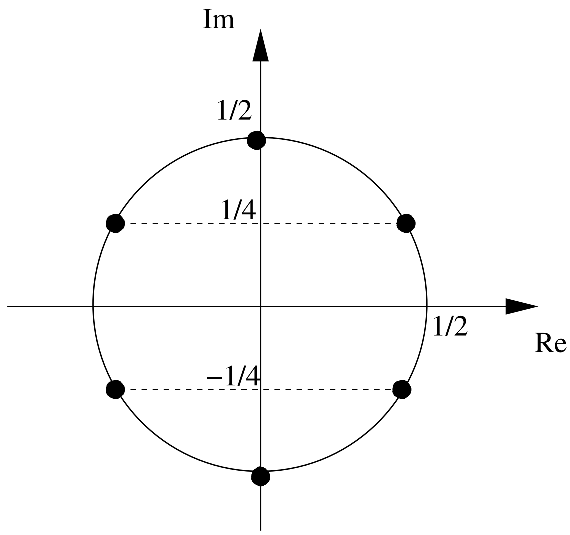
$$z^2 = 4\big(\tfrac{\sqrt{2}}{2} + i\tfrac{\sqrt{2}}{2}\big) = 4\exp(i\tfrac{\pi}{4}).$$

Daraus folgt schliesslich

$$z^6 = (z^2)^3 = \left(4\exp(i\tfrac{\pi}{4})\right)^3 = 64\exp(i\tfrac{3}{4}\pi).$$

Siehe nächstes Blatt!

3. Alle schwarzen Punkte in der unten stehenden Figur entsprechen Lösungen der Gleichung . . .



(a) $z^8 = \frac{1}{256}$

(b) $z^6 = \frac{1}{64}$

(c) $z^6 = \frac{1}{2}$

√ (d) $z^6 = -\frac{1}{64}$

Korrekt!

Offenbar gilt

$$\left(\frac{i}{2}\right)^6 = \frac{(-1)^3}{2^3 \cdot 2^3} = -\frac{1}{64},$$

sodass $\frac{i}{2}$ eine Lösung von $z^6 = -\frac{1}{64}$. Alle anderen Lösungen erhält man durch Multiplikation dieser Lösung mit allen sechsten Einheitswurzeln $e^{\frac{2\pi i}{6}\cdot k}$,($k = 1, \ldots, 5$):

$$z_k = \frac{i}{2} \cdot e^{\frac{2\pi i}{6}\cdot k}, \qquad k = 1, \ldots 5.$$

Dies sind gerade die Punkte auf dem Kreis um 0 mit Radius $\frac{1}{2}$, welche man erhält, wenn man $\frac{i}{2}$ immer wieder um $60°$ weiterdreht; also gerade die abgebildeten Punkte.

Bitte wenden!

4. Es seien $z, w \in \mathbb{C}$ komplexe Zahlen mit $z^4 = 1$ und $w^3 + i = 0$. Welche der folgenden Zahlen ist ein möglicher Wert der Summe $z + w$?

√ (a) 0

(b) $\frac{-i}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

(c) 1

(d) $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

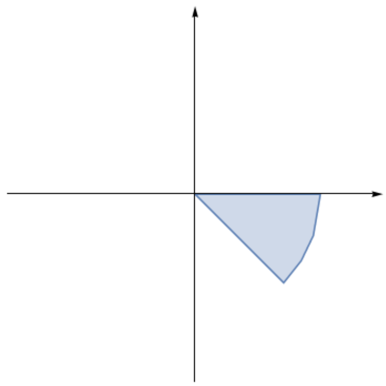
Die Lösungsmengen für $z^4 = 1$ und $w^3 = -i$ ergeben sich zu

$$\{z \in \mathbb{C} : z^4 = 1\} = \{1, i, -1, -i\}$$
$$\{w \in \mathbb{C} : w^3 = -i\} = \left\{ i, -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \right\}$$

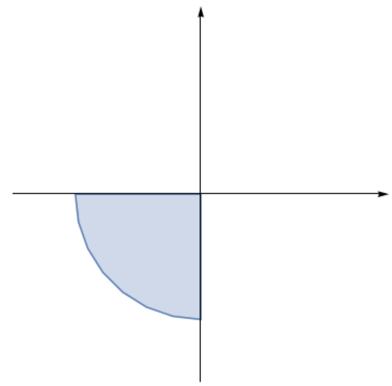
Damit ist $0 = -i + i$ ein möglicher Wert der Summe $z + w$ für $z \in \{z \in \mathbb{C} : z^4 = 1\}$ und $w \in \{w \in \mathbb{C} : w^3 = -i\}$.

5. Es sei
$$A := \left\{ re^{i\varphi} : r \in [0,1], \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4} \right] \right\} \subset \mathbb{C}$$
und es sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $z \mapsto z^2$. Welche der folgenden Mengen entspricht $f(A)$?

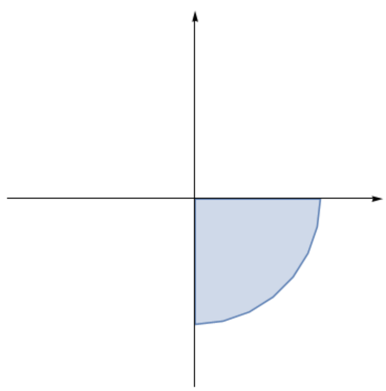
$a)$



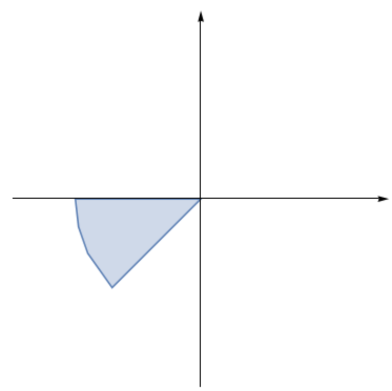
$b)$



$c)$



$d)$



(a) a)

√ (b) b)

(c) c)

(d) d)

Es gilt
$$f(re^{i\varphi}) = re^{i\varphi}re^{i\varphi} = r^2 e^{i2\varphi}.$$
Beachte $f([0,1]) = [0,1]$, d.h. die Funktion $x \mapsto x^2$ ist surjektiv auf $[0,1]$. Weil $2[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}] = [-\pi, -\frac{\pi}{2}]$ ist Antwort b) richtig.

Bitte wenden!

2. Finde alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung

$$z^6 + (1-3i)z^3 - 2 - 2i = 0.$$

Lösung:

Mit der Substitution $u = z^3$ ergibt sich die quadratische Gleichung

$$u^2 + (1-3i)u - 2 - 2i = 0.$$

Mit quadratischer Ergänzung folgt

$$\left(u + \frac{1-3i}{2}\right)^2 = 2 + 2i + \frac{1}{4}(1-3i)^2 = \frac{1}{2}i$$

Gesucht ist somit $w = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $w^2 = x^2 - y^2 + 2xyi = \frac{1}{2}i$. Aus den beiden Gleichungen $x^2 - y^2 = 0$ und $2xy = 1/2$ folgt

$$x^4 = \frac{1}{16}$$

mit den reellen Lösungen $x = \pm 1/2$. Also sind mit $w = (1+i)/2$ oder $w = -(1+i)/2$ die Wurzeln gegeben. Für den gesuchten Wert u erhalten wir die beiden Möglichkeiten

$$u = w - \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i = \begin{cases} 2i \\ -1+i \end{cases}$$

In Polarkoordinaten ist

$$2i = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

und

$$-1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

Lösungen der Gleichung $z^3 = u$ erhalten wir aus der Polarkoordinatendarstellung von u, indem die dritte Wurzel des Betrags gezogen wird und das Argument φ durch 3 geteilt wird. Um alle möglichen Argumente im Intervall $[0, 2\pi]$ zu bekommen, müssen wir noch die weiteren Möglichkeiten $(\varphi + 2\pi)/3$ und $(\varphi + 4\pi)/3$ berücksichtigen. Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned}
z_1 &= 2^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)\\
z_2 &= 2^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)\\
z_3 &= 2^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)\\
z_4 &= 2^{\frac{1}{6}}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\\
z_5 &= 2^{\frac{1}{6}}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right)\\
z_6 &= 2^{\frac{1}{6}}\left(\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12}\right)
\end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

3. Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen $u, v \in \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{u+v}.$$

Hinweis: Substituieren Sie $z = \frac{v}{u}$.

Lösung:

Zunächst beobachten wir, dass die Gleichung nur gelten kann, wenn $u \neq 0$,$v \neq 0$ und $u + v \neq 0$ gilt. Setzen wir $z = v/u$, so folgt aus der gewünschten Identität

$$1 = \frac{u+v}{u} + \frac{u+v}{v} = 1 + z + \frac{1}{z} + 1$$

bzw. die quadratische Gleichung

$$z^2 + z + 1 = 0.$$

Mit quadratischer Ergänzung,

$$0 = z^2 + z + 1 = \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4},$$

bestimmen wir die beiden Lösungen dieser Gleichung

$$z_\pm = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Mit diesem Resultat für z erhalten wir zu jedem $u \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ zwei Zahlen

$$v_\pm = -\frac{1}{2}\left(1 \mp i\sqrt{3}\right)u,$$

für die die gewünschte Gleichung erfüllt ist.

4. Es sei das Gebiet

$$B = \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \,\middle|\, \mathrm{Im}\left(\frac{z+2}{iz}\right) > 0 \right\}$$

gegeben.

a) Skizzieren Sie das Gebiet B in der komplexen Ebene.

Für $z = x + iy$ gilt

$$\begin{aligned}
\frac{z+2}{iz} &= \frac{x+iy+2}{i(x+iy)} = \frac{x+iy+2}{ix-y} = \frac{(-ix-y)(x+iy+2)}{(-ix-y)(ix-y)} \\
&= \frac{-ix^2+xy-2ix-xy-iy^2-2y}{x^2+y^2} \\
&= \frac{-2y}{x^2+y^2} + \frac{-2x-x^2-y^2}{x^2+y^2}i.
\end{aligned}$$

Das Gebiet B ist damit gegeben durch

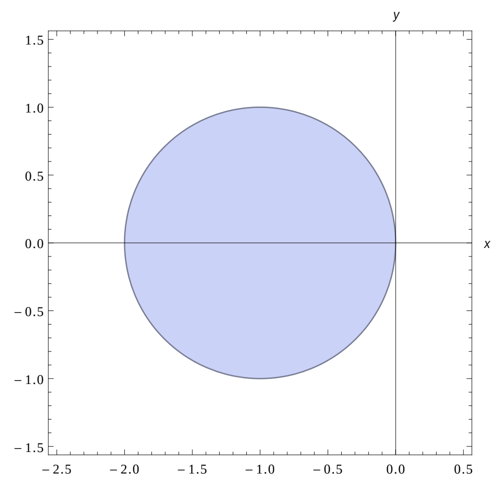
$$\mathrm{Im}\left(\frac{z+2}{iz}\right) = \frac{-2x-x^2-y^2}{x^2+y^2} > 0.$$

Bitte wenden!

Umgeformt ergibt das

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Im}\left(\frac{z+2}{iz}\right) = \frac{-2x-x^2-y^2}{x^2+y^2} > 0 \\
\Leftrightarrow\quad & -2x-x^2-y^2 > 0 \\
\Leftrightarrow\quad & 0 > x^2+2x+y^2 \\
\Leftrightarrow\quad & 0 > (x+1)^2-1+y^2 \\
\Leftrightarrow\quad & 1 > (x+1)^2+y^2.
\end{aligned}$$

Das Gebiet B ist also das Innere des Kreises mit Mittelpunkt $(-1,0)$ und Radius 1. Der Rand gehört nicht zur Menge.



b) Das Polynom $z^3+\frac{7}{2}z^2+7z+6$ hat eine komplexe Nullstelle mit Realteil gleich -1. Bestimmen Sie alle Nullstellen dieses Polynoms. Wie lauten die Nullstellen in Polarform?

Wir bemerken zuerst, dass -1 keine Nullstelle des Polynoms ist und folglich die Nullstelle mit Realteil -1 nicht reell ist. Da solche Nullstellen für Polynome mit reellen Koeffizienten immer in komplex konjugierten Paaren auftreten, hat das Polynom zwei Nullstellen von der Form

$$z_{1,2} = -1 \pm iy.$$

Somit müssen wir vom Polynom einen Faktor der Form

$$(z+1+iy)(z+1-iy) = z^2+2z+1+y^2$$

abspalten können. Polynomdivision ergibt

$$\begin{array}{lllll}
(z^3 & +\frac{7}{2}z^2 & +7z & +6 &):\quad (z^2+2z+1+y^2) = z+\frac{3}{2} \\
-(z^3 & +2z^2 & +(1+y^2)z & &) \\
\hline
 & \frac{3}{2}z^2 & +(6-y^2)z & +6 & \\
-(& \frac{3}{2}z^2 & +3z & +\frac{3}{2}(1+y^2) &) \\
\hline
 & & (3-y^2)z & +(\frac{9}{2}-\frac{3}{2}y^2) &
\end{array}$$

Es bleibt also der Rest

$$(3-y^2)z+\frac{9}{2}-\frac{3y^2}{2}$$

Siehe nächstes Blatt!

übrig und dieser muss gleich 0 sein. Es ergibt sich also $y = \pm\sqrt{3}$ und die drei Nullstellen lauten in Normalform

$$z_1 = -1 + \sqrt{3}i, \quad z_2 = -1 - \sqrt{3}i, \quad z_3 = -\frac{3}{2}.$$

In Polarform lauten diese somit

$$z_1 = 2e^{\frac{2\pi i}{3}}, \quad z_2 = 2e^{\frac{-2\pi i}{3}}, \quad z_3 = \frac{3}{2}e^{\pi i}.$$

c) Welche dieser Nullstellen befinden sich in B?

In **1.a)** haben wir gesehen, dass alle Punkte $z = x + iy$ in B die Ungleichung

$$1 > (x+1)^2 + y^2$$

erfüllen müssen. Es folgt $z_1 \notin B,\ z_2 \notin B,\ z_3 \in B.$

5. Finde in der komplexen Ebene alle Lösungen der folgenden Gleichungen. Gebe die Lösung jeweils auch in Polarform an.

a) $z^6 = -8$

Die Gleichung lässt sich als $z^6 = (\sqrt{2})^6 e^{i\pi}$ darstellen, also sind die Lösungen in Polarform

$$z_k = \sqrt{2}e^{\left(\frac{\pi}{6} + k\cdot\frac{2\pi}{6}\right)i}, \quad k = 0, \ldots, 5;$$

also $\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{6}i}$, $\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{6}i}$, $\sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{6}i}$, $\sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{6}i}$, $\sqrt{2}e^{\frac{9\pi}{6}i}$, $\sqrt{2}e^{\frac{11\pi}{6}i}$.

In Normalform lauten die Lösungen

$$\begin{aligned}
z_0 &= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}},\\
z_1 &= i\sqrt{2},\\
z_2 &= \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}},\\
z_3 &= \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}},\\
z_4 &= -i\sqrt{2},\\
z_5 &= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

b) $z^5 - 8(-1 - i\sqrt{3})z = 0$

Wir klammern zuerst aus:

$$z^5 - 8(-1 - i\sqrt{3})z = z(z^4 - 8(-1 - i\sqrt{3})) = 0.$$

Offensichtlich ist also $z = 0$ eine Lösung. Für den anderen Faktor erhalten wir mit der Polardarstellung $z = re^{i\varphi}$ die Gleichung

$$z^4 = r^4 e^{4i\varphi} = 8(-1 - i\sqrt{3}) = 16e^{i\frac{4\pi}{3}}.$$

Bitte wenden!

Die weiteren Lösungen lauten damit in Polarform

$$z_k = 2e^{(\frac{\pi}{3}+k\frac{2\pi}{4})i}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

In Normalform sind die Lösungen der Gleichung also

$$\begin{aligned} z_0 &= 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 1 + i\sqrt{3}, \\ z_1 &= 2e^{i\frac{5\pi}{6}} = -\sqrt{3} + i, \\ z_2 &= 2e^{i\frac{4\pi}{3}} = -1 - i\sqrt{3}, \\ z_3 &= 2e^{i\frac{11\pi}{6}} = \sqrt{3} - i; \\ \text{und } z_4 &= 0. \end{aligned}$$

c) $3z^3 - 12z^2 + pz + q = 0$, wobei $z_1 = 3 + i$ eine Lösung der Gleichung sein soll und p, q reelle Koeffizienten sind, welche noch bestimmt werden müssen.

Da sämtliche Koeffizienten reell sind, muss nach einem Satz aus der Vorlesung neben z_1 auch $z_2 = \overline{z_1}$ eine Nullstelle des Polynoms sein. Damit folgt, dass $(z - z_1)(z - z_2)$ ein Faktor des Polynoms ist. Nach dem Hauptsatz der Algebra gibt es auch noch eine weitere Nullstelle z_3, welche reell sein muss (Nullstellen sind reell oder treten in komplex konjugierten Paaren auf; aber es sind in diesem Fall nur drei). Das ergibt:

$$\begin{aligned} & 3z^3 - 12z^2 + pz + q &=& \; 3(z - (3+i))(z - (3-i))(z - z_3) \\ \iff \quad & 3z^3 - 12z^2 + pz + q &=& \; 3(z^2 - 6z + 10)(z - z_3) \\ \iff \quad & 3z^3 - 12z^2 + pz + q &=& \; 3z^3 - (18 + 3z_3)z^2 + (30 + 18z_3)z - 30z_3. \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir zur Bestimmung der drei Unbekannten p, q, z_3 die Gleichungen:

$$\begin{array}{rcll} 12 &=& 18 + 3z_3 & \Rightarrow \underline{z_3 = -2} \\ p &=& 30 + 18z_3 & \Rightarrow \underline{p = -6} \\ q &=& -30z_3 & \Rightarrow \underline{q = 60} \end{array}$$

Zusammengefasst sind die jeweiligen Normal- und Polarformen der Lösungen

$$\begin{aligned} z_1 &= 3 + i = \sqrt{10}e^{i\arctan(1/3)}, \\ z_2 &= 3 - i = \sqrt{10}e^{-i\arctan(1/3)}, \\ z_3 &= -2 = 2e^{i\pi}. \end{aligned}$$