Lösung - Serie 6

1. MC-Aufgaben (Online-Abgabe)

1. Für alle ganzen Zahlen $n \geq 1$ gilt ...

$\surd$ (a) $e^{-1/x} = o(x^n)$ für $x \to 0^+$

(b) $e^{1/x} = o(x^{-n})$ für $x \to 0^+$

$\surd$ (c) $x^{-n} = o(e^{1/x})$ für $x \to 0^+$

$\surd$ (d) $e^{\sqrt{\ln x}} = o\left(x^{1/3}\right)$ für $x \to +\infty$

(e) $\sin^2(x)\ln^3(x) = o\left(\ln^3(x)\right)$ für $x \to +\infty$

Die richtigen Antworten sind (a), (c) und (d).

Für (a) betrachte man, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $x > 0$ ist $e^x > \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$. Daraus folgt, dass $e^{-1/x} < (n+1)! \cdot x^{n+1}$ ist. Aus dieser Ungleichung ergibt sich, dass $0 \leq \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x^n} \leq (n+1)! \lim_{x\to 0^+} x = 0$.

Nach einem Variablentransformation ist (c) äquivalent zu $x^n = o(e^x)$ für $x \to \infty$. Dies wurde in der Vorlesung bewiesen.

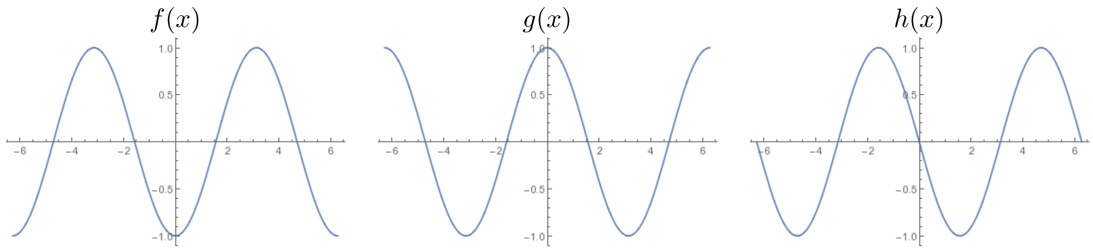
Für (d) gilt $\lim_{x\to\infty} \frac{e^{\sqrt{\log x}}}{x^{1/3}} = \lim_{x\to\infty} e^{\sqrt{\log x}-(1/3)\log(x)} = 0$, da $\sqrt{\log(x)} = o(\log(x))$ für $x \to \infty$.

(b) ist falsch, denn es gilt $e^{1/x} > \frac{1}{n!\cdot x^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $x > 0$. Somit ist, wenn er existiert,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{1/x}}{x^{-n}} \geq \frac{1}{n!}.$$

(e) ist falsch, denn $\frac{\sin^2(x)\log^3(x)}{\log^3(x)} = \sin^2(x)$ und folglich konvergiert der Bruch nicht.

2. Gegeben seien die folgenden Graphen von Funktionen



Welche drei der folgenden sechs Aussagen sind korrekt?

(a) $h' = g$

Falsch. h ist auf dem Intervall $(-\pi/2, \pi/2)$ monoton fallend, aber g ist dort positiv.

√ (b) $h' = -g$

Richtig! h hat in $-\pi/2$ ein lokales Maximum, in $\pi/2$ ein lokales Minimum und fällt dazwischen monoton. g hat ebenfalls bei $-\pi/2$ und $\pi/2$ Nullstellen, und ist dazwischen positiv, d.h. $-g$ ist dort negativ. Dies sind Indizien dafür dass die Aussage korrekt ist.

(c) $f' = h$

Falsch. f ist auf dem Intervall $(0, \pi)$ monoton steigend, aber h ist dort negativ.

√ (d) $g' = h$

Richtig! g hat in 0 ein lokales Maximum, genau dort wo h eine Nullstelle hat. Zudem ist g auf $(-\pi, 0)$ monoton steigend und auf $(0, \pi)$ monoton fallend. Dies passt dazu, dass h dort positiv bzw. negativ ist.

(e) $f'' = h$

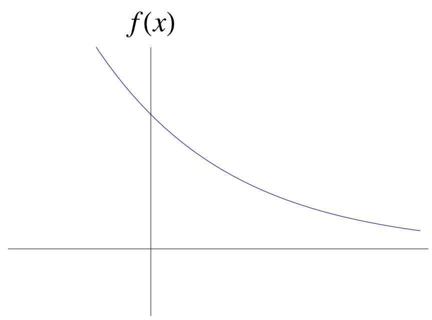
Falsch. Stellt man sich vor man fährt auf dem Graph von f Auto, so müsste man auf dem Intervall $(-\pi/2, \pi/2)$ nach links lenken, d.h. dort wäre f'' positiv. h ist aber negativ auf dem Intervall $(0, \pi/2)$.

√ (f) $f'' = g$

Richtig! Stellt man sich vor man fährt auf dem Graph von f Auto, dann muss man zwischen $-\frac{3}{2}\pi$ und $-\pi/2$ nach rechts lenken, zwischen $-\pi/2$ und $\pi/2$ nach links lenken und zwischen $\pi/2$ und $\frac{3}{2}\pi$ nach rechts lenken. Das passt dazu, dass g auf $(-3\pi/2, -\pi/2)$ negativ ist, auf $(-\pi/2, \pi/2)$ positiv ist und auf $(\pi/2, 3\pi/2)$ negativ ist.

Siehe nächstes Blatt!

3. Die Figur zeigt den Graphen einer zweimal differenzierbaren Funktion f. Was lässt sich über f, f' und f'' sagen?



(a) Die erste Ableitung f' ist positiv.

√ (b) Die erste Ableitung f' ist negativ

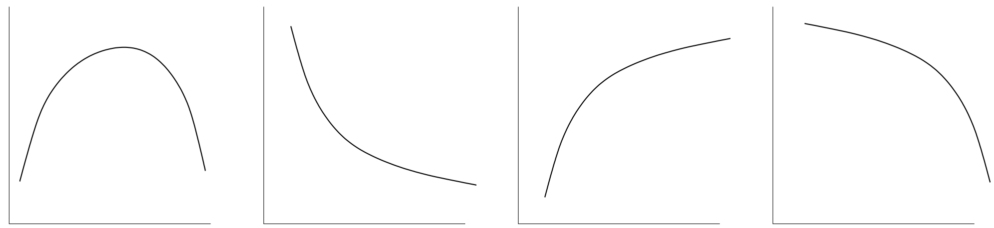
(c) Die zweite Ableitung f'' ist negativ.

√ (d) Die zweite Ableitung f'' ist positiv.

In jedem Punkt ist die Steigung der jeweiligen Tangente negativ, also ist f' negativ. Die erste Ableitung ist nirgends konstant, d.h. die zweite Ableitung sicher ungleich Null. Der Graph beschreibt eine konvexe Kurve, damit muss $f'' > 0$ sein.

Bitte wenden!

4. Sei f eine Funktion mit $f'' < 0$. Welcher der folgenden Kurven könnten den Graphen G_f von f beschreiben?



I II III IV

√ (a) I

(b) II

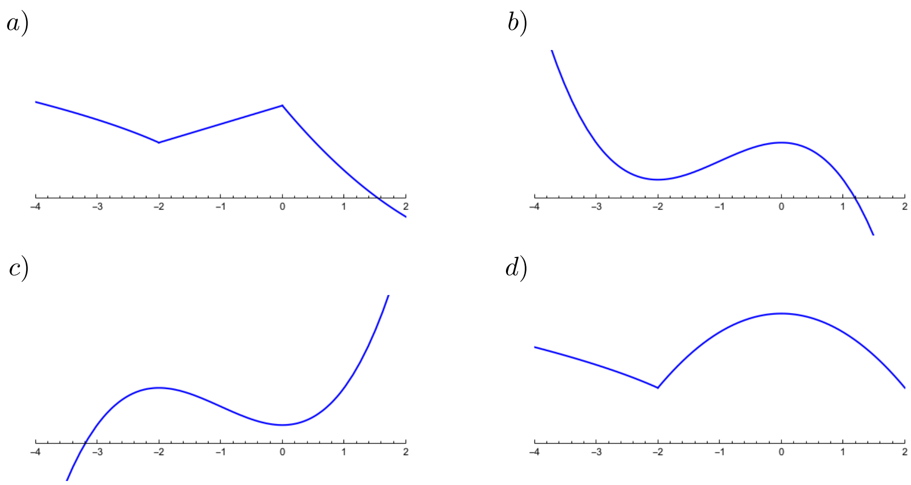
√ (c) III

√ (d) IV

(e) Keine.

Die Bedingung $f'' < 0$ impliziert, dass die Steigung f' streng monoton fällt, also G_f eine Rechtskurve beschreibt.

5. Gegeben sind die folgende Funktionen:



Welche der folgenden Aussagen sind *richtig*?

(a) Alle Funktionen a)-d) sind differenzierbar.

$\surd$ (b) Falls die zweite Ableitung der Funktionen b) und c) existiert, dann hat sie jeweils mindestens eine Nullstelle.

(c) Jede der Funktionen a)-d) hat eine Stelle mit verschwindender Ableitung.

(d) Die Funktion c) ist konvex.

Die Funktionen a) und d) sind nicht differenzierbar, weil der Graph einen Knick hat. Weiter haben die Graphen in b) und c) jeweils bei -2 und 0 ein Extremum (also eine Nullstelle der ersten Ableitung) und somit muss die zweite Ableitung eine Nullstelle haben (gemäss dem Mittelwertsatz).

Die Funktion a) ist an den Stellen -2 und 0 nicht differenzierbar und auf den Segmenten zwischen diesen Stellen ist die Funktion abwechselnd strikt monoton steigend oder strikt monoton fallend. Deshalb hat die Ableitung bei a) keine Nullstellen (weil strikt monoton bedeutet entweder $f'(x) > 0$ oder $f'(x) < 0$). Der Graph von c) ist nicht konvex, da beispielsweise die Sekante von -3 zu 1 den Graph schneidet.

2. Man ordne die folgenden Funktionen nach der Stärke, mit der sie für $x \to +\infty$ nach $+\infty$ streben.

a) $\ln\big(\ln(x^2)\big)$ b) $\ln\big(e^x - x\big)$ c) x^2

d) $x^{1/5}$ e) $\ln\big(10\,x^{1/2}\big)$ f) e^{3x}

Lösung:

Wir verwenden

$$\ln x = o(x^k) \quad \text{für } x \to ++\infty, \quad \text{falls } k > 0 \tag{1}$$

$$x^k = o(e^x) \quad \text{für } x \to ++\infty, \tag{2}$$

um die folgenden Grenzwerte zu berechnen:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln\ln x^2}{\ln 10x^{1/2}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln 2 + \ln\ln x}{\ln 10 + \frac{1}{2}\ln x} = \lim\limits_{y\to+\infty} \dfrac{\ln 2 + \ln y}{\ln 10 + \frac{1}{2} y} \overset{(1)}{=} 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(10x^{1/2})}{x^{1/5}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln 10 + \frac{1}{2}\ln x}{x^{1/5}} \overset{(1)}{=} 0$
- $0 \overset{(2)}{\leq} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{1/5}}{\ln(e^x - x)} \overset{(2)}{\leq} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{1/5}}{\frac{1}{2}\ln e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x^{-4/5} = 0$
- $0 \overset{(2)}{\leq} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(e^x - x)}{x^2} \leq \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln e^x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} x^{-1} = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{e^{3x}} \overset{(2)}{=} 0$

Zusammengefasst hat man also

a) $\ll$ e) $\ll$ d) $\ll$ b) $\ll$ c) $\ll$ f)

3. Für welche der untenstehenden Funktionen $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt $g(x) = O(e^x)$ mit $x \to +\infty$ und für welche gilt $e^x = O(g(x))$ mit $x \to +\infty$?

a) $g(x) = e^{x+4}$;

b) $g(x) = e^x + 17x^{17}$;

c) $g(x) = e^{x^2}$;

d) $g(x) = 200e^{\frac{1}{x^3}}$;

e) $g(x) = x^x$.

Lösung:

a)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x+4}}{e^x} = e^4 \text{ und } \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^{x+4}} = e^{-4},$$

also $g(x) = O(e^x)$ und $e^x = O(g(x))$.

Siehe nächstes Blatt!

b)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x + 17x^{17}}{e^x} = 1 + 0 \text{ und } \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x + 17x^{17}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1 + \frac{17x^{17}}{e^x}} = 1,$$

also $g(x) = O(e^x)$ und $e^x = O(g(x))$.

c)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x^2}}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} e^{x^2-x} = +\infty \text{ und } \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} e^{x-x^2} = 0,$$

also $e^x = O(g(x))$. Wir haben benutzt, dass $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - x = +\infty$ und $\lim\limits_{x\to+\infty} x - x^2 = -\infty$.

d)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{200e^{\frac{1}{x^3}}}{e^x} = 0 \text{ und } \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{200e^{\frac{1}{x^3}}} = +\infty,$$

also $g(x) = O(e^x)$.

e) Beachte $x^x = e^{x\ln(x)}$ und somit

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x\ln(x)}}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} e^{x(\ln(x)-1)} = +\infty \text{ und } \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^{x\ln(x)}} = \lim_{x\to+\infty} e^{x(1-\ln(x))} = 0$$

also $e^x = O(x^x)$.

4. Gegeben sei die Funktion

$$f:\, x \longmapsto x^{3/2}(x-2)^3$$

a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich und Nullstellen von f.

b) Wo ist f monoton wachsend? Monoton fallend? Bestimmen Sie die lokalen Extrema von f, falls vorhanden, und unterscheiden Sie Minima und Maxima. Besitzt f globale Extrema?

c) Bestimmen Sie den Wertebereich von f.

d) Wo ist f konvex? Wo ist f konkav? Bestimmen Sie eventuelle Wendepunkte von f.

e) Mit der oben bestimmten Information skizziere man den Graphen von f.

Lösung:

a) Die Funktion $f(x) = x^{3/2}(x-2)^3$ ist nur für negative Werte von x nicht definiert. Folglich ist der Definitionsbereich von f das Intervall $[0, \infty)$.

Da $f(x) = 0$ nur dann gilt, wenn entweder $x^{3/2} = 0$ oder $(x-2)^3 = 0$ gilt, sind die Nullstellen von f gleich $x = 0$ und $x = 2$.

b) Die Ableitung von f ist durch folgende Formel für all $x \in (0, \infty)$ gegeben:

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^{1/2}(x-2)^3 + 3x^{3/2}(x-2)^2 = \frac{3}{2}x^{1/2}(x-2)^2(3x-2).$$

Folglich sind die Nullstellen von f' im Intervall $(0, \infty)$ durch $x = 2$ und $x = 2/3$ gegeben. Es ist leicht zu überprüfen, dass $f'(x) < 0$ für $x \in (0, 2/3)$, $f'(x) > 0$ für $x \in (2/3, 2)$ und

$f'(x) > 0$ für $x > 2$ gilt. Demnach ist f im Intervall $(0, 2/3)$ streng monoton fallend und im Intervall $(2/3, \infty)$ monoton (aber nicht streng monoton) steigend.

Dadurch ergibt sich, dass die einzige lokale Minimalstelle von f an der Stelle $x = 2/3$ zu finden ist, und dass $x = 2/3$ auch eine globale Minimalstelle ist. Überdies folgt aus der oben bewiesenen Monotonie, dass f keine lokalen oder globalen Maximalstellen hat (obwohl $f'(2) = 0$).

c) Wie schon in b) argumentiert, hat f eine globale Minimalstelle bei $x = 2/3$ und keine globale Maximalstelle. Ausserdem erkennt man leicht, dass $f(x) \to \infty$ wenn $x \to \infty$ und dass f im Definitionsbereich stetig ist. Folglich ist der Wertebereich von f genau das Intervall $[f(2/3), \infty)$, welches gleich

$$\left[-\frac{(2/3)^{3/2}4^3}{3^3}, \infty\right)$$

ist.

d) Die zweite Ableitung von f ist durch

$$\begin{aligned} f''(x) &= 3(x-2)x^{1/2}(3x-2) + \frac{3(x-2)^2(3x-2)}{4x^{1/2}} + \frac{9}{2}(x-2)^2x^{1/2} \\ &= \frac{3(x-2)}{4x^{1/2}}\left(4x(3x-2) + (x-2)(3x-2) + 6(x-2)x\right) \\ &= \frac{3(x-2)}{4x^{1/2}}\left(21x^2 - 28x + 4\right) \end{aligned}$$

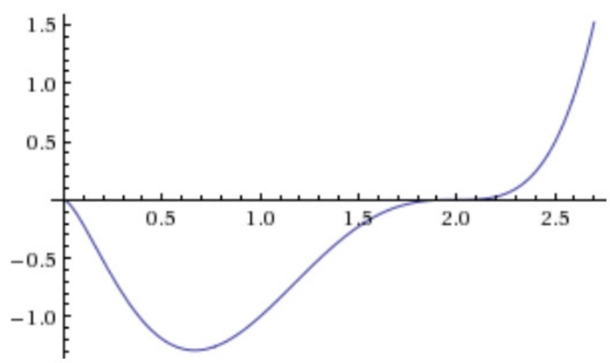
für alle $x \in (0, \infty)$ gegeben. Also ist $f''(x) = 0$ genau dann, wenn $x = 2$ oder $21x^2 - 28x + 4 = 0$ gilt. Unter Zuhilfenahme der quadratischen Lösungsformel folgt, dass die Nullstellen von f'' durch $x = 2$, $x = \frac{2}{3} - \frac{4}{3\sqrt{7}} \approx 0.163$ und $x = \frac{2}{3} + \frac{4}{3\sqrt{7}} \approx 1.171$ gegeben; dies sind die möglichen Wendepunkte von f. Eine kurze Rechnung zeigt, dass $f''(x) < 0$ für $x \in \left(0, \frac{2}{3} - \frac{4}{3\sqrt{7}}\right)$, dass $f''(x) > 0$ für $x \in \left(\frac{2}{3} - \frac{4}{3\sqrt{7}}, \frac{2}{3} + \frac{4}{3\sqrt{7}}\right)$, dass $f''(x) < 0$ für $x \in \left(\frac{2}{3} + \frac{4}{3\sqrt{7}}, 2\right)$ und dass $f''(x) > 0$ für $x \in (2, \infty)$ gilt. Folglich ist f strikt konvex auf

$$\left(\frac{2}{3} - \frac{4}{3\sqrt{7}}, \frac{2}{3} + \frac{4}{3\sqrt{7}}\right) \cup (2, \infty)$$

und strikt konkav auf

$$\left(0, \frac{2}{3} - \frac{4}{3\sqrt{7}}\right) \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{4}{3\sqrt{7}}, 2\right).$$

e) Der Graph von f ist



Siehe nächstes Blatt!

5. Es sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion, so dass

$$f\big((1-t)x_1 + tx_2\big) \le (1-t)\, f(x_1) + t\, f(x_2) \tag{1}$$

für alle $x_1, x_2 \in (a,b)$ und $t \in [0,1]$. Das Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass f konvex ist.

a) Was bedeutet die Ungleichung (1) geometrisch? Begründe mittels einer Skizze in der Abbildung 1 auf der nächsten Seite.

b) Zeige, dass gilt

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$$

für alle $x_1 < x < x_2$ wobei $x, x_1, x_2 \in (a,b)$. (*Hinweis*: Setze $t = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$.)

c) Benutze Teilaufgabe b) um zu zeigen, dass die Funktion f' monoton wachsend ist.

d) Wieso ist f konvex?

e)* Zeige unter Verwendung des Mittelwertsatzes, dass jede zweimal differenzierbare *konvexe* Funktion $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ die Ungleichung (1) erfüllt.

Lösung:

a) Beachte $(1-t)f(x_1) + tf(x_2) = f(x_1) + t\,(f(x_2) - f(x_1))$. Die Ungleichung bedeutet geometrisch, dass die Strecke zwischen $(x_1, f(x_1))$ und $(x_2, f(x_2))$ immer über dem Graphen von f liegt. Siehe Abbildung 1 auf der nächsten Seite für eine Skizze.

b) Wir setzen $t := \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$. Es gilt also $1 - t = \frac{x_2-x_1-(x-x_1)}{x_2-x_1} = \frac{x_2-x}{x_2-x_1}$ und deshalb

$$f(x) = f\left(\frac{x_2-x}{x_2-x_1}x_1 + \frac{x-x_1}{x_2-x_1}x_2\right) \le \frac{x_2-x}{x_2-x_1}f(x_1) + \frac{x-x_1}{x_2-x_1}f(x_2).$$

Multipliziert man das Ganze mit $x_2 - x_1$ dann erhält man

$$(x_2-x_1)f(x) \le (x_2-x)f(x_1) + (x-x_1)f(x_2).$$

Weil $x_2 - x_1 = (x_2 - x) + (x - x_1)$, erhalten wir

$$(x_2-x)f(x) + (x-x_1)f(x) \le (x_2-x)f(x_1) + (x-x_1)f(x_2)$$

und deshalb

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$$

wie gewünscht.

c) Es gilt

$$f'(x_1) = \lim_{x\to x_1} \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \le \lim_{x\to x_1} \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

und

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \lim_{x\to x_2} \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \le \lim_{x\to x_2} \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} = f'(x_2).$$

Fasst man die Ungleichungen zusammen erhält man $f'(x_1) \le f'(x_2)$. Die Funktion f' ist also monoton wachsend.

Bitte wenden!

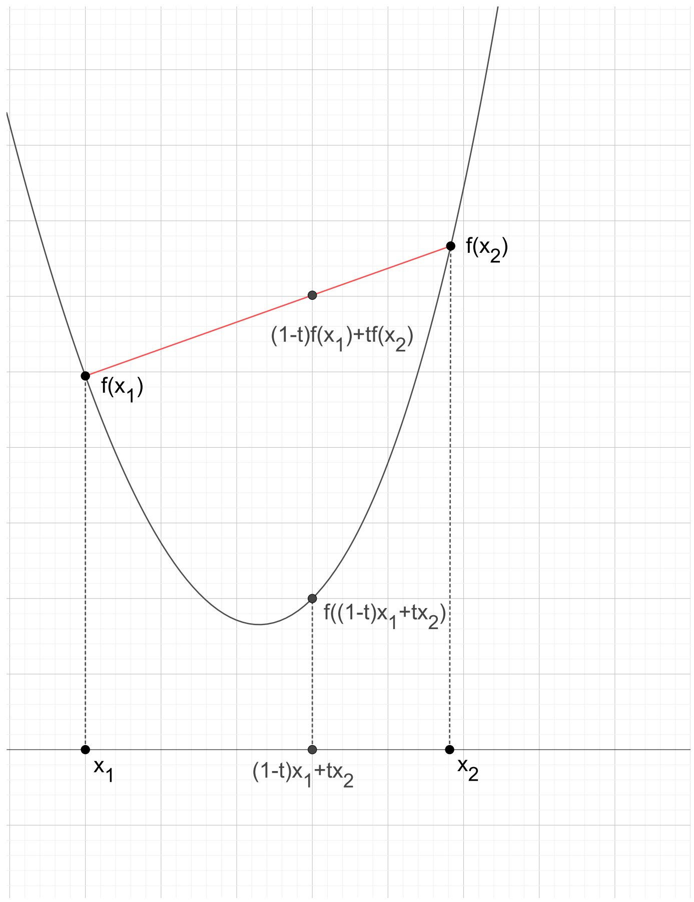


Abbildung 1: Skizze zu Teilaufgabe a)

Siehe nächstes Blatt!

d) Falls eine reellwertige Funktion g monoton wachsend ist, dann gilt $g' \geq 0$. Weil f' monoton wachsend ist, folgt somit $(f')' \geq 0$. Nach Definition $f'' = (f')'$, deshalb $f'' \geq 0$ und die Funktion f ist somit konvex.

e) Es seien $a < x_1 < x < x_2 < b$ beliebig. Nach dem Mittelwertsatz gibt es einen Punkt $\xi_1 \in (x_1, x)$, so dass

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(\xi_1),$$

Analog gibt es ein $\xi_2 \in (x, x_2)$, so dass

$$\frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(\xi_2).$$

Nach Voraussetzung ist f konvex, also gilt $f'' \geq 0$. Somit folgt, dass die Funktion f' monoton wachsend ist. Weil $\xi_1 \leq \xi_2$, erhalten wir $f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2)$. Berücksichtigt man das zuvor gezeigte, erhält man

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

Diese Ungleichung wurde in der Teilaufgabe b) aus der Ungleichung (1) hergeleitet. Wenn man sich die Herleitung ansieht, sieht man, dass man dieselbe Rechnung auch rückwärts durchführen kann. Somit folgt

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$$

für alle $x_1, x_2 \in (a, b)$ und $t \in [0, 1]$, wie gewünscht.

Bemerkung: In dieser Aufgabe haben wir folgende, in der Praxis äusserst nützliche, Äquivalenz gezeigt:

$$f'' \geq 0 \Longleftrightarrow \text{ f zweimal differenzierbar und Ungleichung (1) gilt.}$$

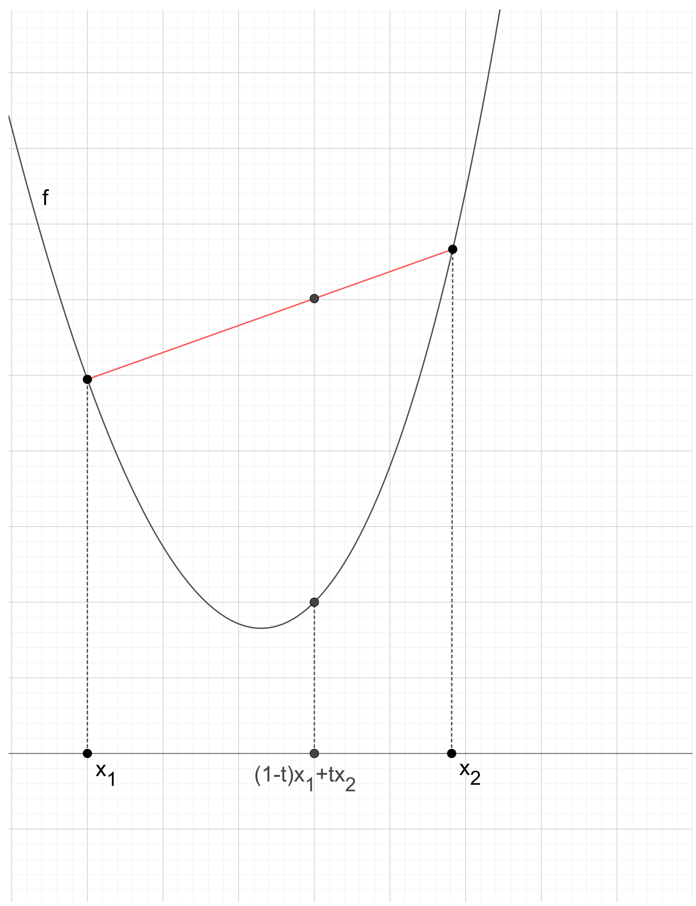


Abbildung 2: Figur zu Teilaufgabe a)