

## Lösung - Schnellübung 1

1. Gesucht sind jeweils eine Liste der Nullstellen der Funktionen

$$f: x \mapsto \cos(3x + 1), \quad g: x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{und} \quad h: x \mapsto x^3 - x^2 - x + 1$$

Für welche Werte von  $x$  ist  $f(x) = 1$ ? Für welche Werte von  $x$  ist  $g(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ?

*Lösung:*

- Es ist  $\cos \phi = 0$  für  $\phi = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ . Daher ist  $\cos(3x + 1) = 0$  für  $3x + 1 = \frac{\pi}{2} + k\pi$  und somit

$$\cos(3x + 1) = 0 \iff x = \frac{1}{3} \left( \frac{\pi}{2} + k\pi - 1 \right), k \in \mathbb{Z}.$$

- Es ist  $\sin \phi = 0$  für  $\phi = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ . Deshalb ist  $\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$  für  $\frac{1}{x} = k\pi$  und somit

$$\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \iff x = \frac{1}{k\pi}, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

- Durch das Einsetzen kleiner ganzen Zahlen erhält man  $h(-1) = 0$  und  $h(1) = 0$ . Es gilt  $(x-1)(x+1) = x^2 - 1$ . Da  $-1$  und  $1$  auch doppelte Nullstellen von  $h$  sein könnten liegt es nahe  $(x^2 - 1)(x - 1)$  auszurechnen und tatsächlich  $(x^2 - 1)(x - 1) = x^3 - x - x^2 + 1 = h(x)$ . Deshalb haben gezeigt  $h(x) = (x - 1)^2(x + 1)$  und somit sind  $-1$  und  $1$  alle Nullstellen von  $h$ .

- Es ist  $\cos(3x + 1) = 1$  für  $3x + 1 = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ , und somit

$$\cos(3x + 1) = 1 \iff x = \frac{1}{3}(2k\pi - 1), k \in \mathbb{Z}.$$

- Es ist  $\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$  für  $\frac{1}{x} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$  oder  $\frac{1}{x} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ , und somit

$$\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \iff x = \frac{1}{\frac{\pi}{3} + 2k\pi} \quad \text{oder} \quad x = \frac{1}{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}, k \in \mathbb{Z}.$$

2. 1. Bestimmen Sie einen geschlossenen Ausdruck für  $1 + 2 + \dots + n$ , wobei  $n$  eine natürliche Zahl ist.

$$\begin{array}{r} \text{Tipp:} \quad \begin{array}{cccccccc} 1 & + & 2 & + & \dots & + & n-1 & + & n & = & x \\ n & + & (n-1) & + & \dots & + & 2 & + & 1 & = & x \\ \hline (n+1) & + & (n+1) & + & \dots & + & (n+1) & + & (n+1) & = & 2x \end{array} \end{array}$$

2. Berechnen Sie, ohne Zuhilfenahme eines Taschenrechners, die Summe aller zweistelligen natürlichen Zahlen, die durch drei geteilt den Rest zwei ergeben.

*Lösung:*

1. Es bezeichne  $x$  den Ausdruck  $1 + 2 + \dots + n$ . Dann gilt (hier formalisieren wir den Tipp)

$$x = \sum_{i=1}^n i = \sum_{i=1}^n (n+1-i).$$

Summiert man nun die letzteren beiden Ausdrücke für  $x$ , so folgt

$$2x = \left( \sum_{i=1}^n i \right) + \left( \sum_{i=1}^n (n+1-i) \right) = \sum_{i=1}^n (n+1) = n(n+1).$$

Folglich ist  $x = \frac{n(n+1)}{2}$ .

2. Die erste (bzw. letzte) zweistellige natürliche Zahl mit der Eigenschaft ist 11 (bzw. 98). Also sind die Zahlen, die addiert werden, Glieder der Folge  $a_n = 11 + 3(n-1)$ , mit  $n = 1, 2, \dots, 30$ . Wenn man die Summe nun mit  $S$  bezeichnet, gilt

$$S = \sum_{n=1}^{30} (11 + 3(n-1)) = 30 \cdot 11 + 3 \cdot \left( \sum_{n=1}^{30} n - 30 \right) = 30 \cdot 11 + 3 \cdot \left( \frac{30 \cdot 31}{2} - 30 \right)$$

Somit ist  $S = 11 \cdot 30 + 3 \cdot (15 \cdot 31 - 15 \cdot 2) = 30 \cdot 11 + 3 \cdot 15 \cdot 29 = 1635$ .

3. Es seien  $p \leq q$  ganze nicht-negative Zahlen. Zeigen Sie, dass für die Folge  $(a_n)$ , gegeben durch

$$a_n = \frac{c_0 + c_1 n + \dots + c_p n^p}{d_0 + d_1 n + \dots + d_q n^q}$$

und  $c_p \neq 0, d_q \neq 0$ , gilt:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \begin{cases} \frac{c_p}{d_q}, & \text{falls } p = q, \\ 0 & \text{falls } p < q. \end{cases}$$

**Siehe nächstes Blatt!**

Ist  $(a_n)$  ebenfalls konvergent falls  $p > q$ ? Begründen Sie ihre Antwort.

*Lösung:*

Für  $p \leq q$  hat man, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{c_0}{n^q} + \frac{c_1}{n^{q-1}} + \dots + \frac{c_{p-1}}{n^{q-(p-1)}} + \frac{c_p}{n^{q-p}}}{\frac{d_0}{n^q} + \frac{d_1}{n^{q-1}} + \dots + \frac{d_{q-1}}{n} + d_q} = \frac{c_p}{d_q} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{q-p}}.$$

Der letzte Limes ist eins, wenn  $p = q$ , und null, wenn  $p < q$ .

Falls  $p > q$  dann ist die Folge  $(a_n)$  divergent. Tatsächlich

$$a_n = \frac{c_0 + c_1 n + \dots + c_p n^p}{d_0 + d_1 n + \dots + d_q n^q} \geq \frac{c_p n^p}{d_0 + d_1 n + \dots + d_q n^q}$$

und deshalb

$$a_n \geq c_p n^{p-q} \frac{1}{\frac{d_0}{n^q} + \frac{d_1}{n^{q-1}} + \dots + \frac{d_{q-1}}{n} + d_q}$$

Der Term

$$\frac{1}{\frac{d_0}{n^q} + \frac{d_1}{n^{q-1}} + \dots + \frac{d_{q-1}}{n} + d_q}$$

konvergiert gegen  $\frac{1}{d_q}$  und der Term  $c_p n^{p-q}$  wird wegen  $p > q$  beliebig gross und deshalb wird auch  $a_n$  für genug grosse  $n$  beliebig gross. Wir haben also gezeigt, dass die Folge  $(a_n)$  divergiert falls  $p > q$ .

#### 4. Berechnen Sie den Grenzwert der beiden unendlichen Zahlenfolgen

$$2, 2\sqrt{2}, 2\sqrt{2\sqrt{2}}, 2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \dots \quad \text{und} \quad 3, 3\sqrt[3]{3}, 3\sqrt[3]{3\sqrt[3]{3}}, 3\sqrt[3]{3\sqrt[3]{3\sqrt[3]{3}}}, \dots$$

*Lösung:*

Es gilt:  $2 = 2^1, 2\sqrt{2} = 2^1 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{1+\frac{1}{2}}, 2\sqrt{2\sqrt{2}} = 2^1 \cdot \left(2^{1+\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}$  und

$2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = 2^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}}$  und so weiter.

Die geometrische Reihe

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

hat den Grenzwert  $\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$ . Da die Funktion  $t \mapsto 2^t$  stetig ist, ist der gesuchte Grenzwert gleich  $2^2 = 4$ .

Analog gilt  $3 = 3^1, 3\sqrt[3]{3} = 3 \cdot 3^{\frac{1}{3}} = 3^{1+\frac{1}{3}}, 3\sqrt[3]{3\sqrt[3]{3}} = 3^{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}}$  und so weiter. Die hier verwendete geometrische Reihe hat den Grenzwert  $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} \dots = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$ .

Also ist der gesuchte Grenzwert gleich  $3^{\frac{3}{2}} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$ .