Lösung - Schnellübung 5

1. **a)** Es sei $w = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ eine komplexe Zahl. Zeigen Sie, dass die beiden Lösungen z_1 und z_2 der Gleichung $z^2 = w$ durch

$$z_{1,2} = \pm\left(\sqrt{\frac{|w|+a}{2}} + i\ \operatorname{sgn}(b)\sqrt{\frac{|w|-a}{2}}\right)$$

gegeben sind. Dabei bezeichnet $\operatorname{sgn}\colon \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}$ die Vorzeichenfunktion, gegeben durch

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & \text{falls } x < 0; \\ 0, & \text{falls } x = 0; \\ 1, & \text{falls } x > 0 \end{cases}$$

für eine reelle Zahl x.

b) Berechnen Sie mithilfe von Teil (a) die komplexen Quadratwurzeln von $-3 + 4i$.

Lösung:

a) Da $z_1^2 = z_2^2$ gilt, reicht es, die Behauptung für z_1 zu beweisen. In der Tat ist

$$\begin{aligned} z_1^2 &= \left(\sqrt{\frac{|w|+a}{2}} + i\ \operatorname{sgn}(b)\sqrt{\frac{|w|-a}{2}}\right)^2 \\ &= \frac{|w|+a}{2} + 2i\operatorname{sgn}(b)\sqrt{\frac{(|w|+a)(|w|-a)}{4}} - \operatorname{sgn}(b)^2\frac{|w|-a}{2} \\ &= \frac{|w|+a}{2} - \frac{|w|-a}{2} + i\operatorname{sgn}(b)\sqrt{(|w|+a)(|w|-a)} = a + i\operatorname{sgn}(b)\sqrt{|w|^2 - a^2} \\ &= a + i\operatorname{sgn}(b)\cdot|b| = a + ib, \end{aligned}$$

da $\operatorname{sgn}(b)\cdot|b| = b$ gilt.

b) In diesem Beispiel gilt $|w| = 5$, $a = -3$ und $\operatorname{sgn}(b) = 1$. Einsetzen ergibt

$$z_{1,2} = \pm\left(\sqrt{\frac{5-3}{2}} + i\sqrt{\frac{5+3}{2}}\right) = \pm(1 + 2i).$$

Beachten Sie, dass diese Formel hier von grossem Nutzen ist, da das Rechnen in Polarform deutlich mühsamer ist (der Polarwinkel ist nicht einfach darstellbar).

2. Bestimmen Sie

a) $\displaystyle\int (t - x)\,dx;$

b) $\displaystyle\int (t - x)\,dt;$

c) $\displaystyle\int x\,e^{x^2}\,dx;$

d) $\displaystyle\int x\,(1 + x^2)^9\,dx;$

e) $\displaystyle\int \frac{1 - x^5}{1 - x}\,dx;$

f) $\displaystyle\int \frac{x^2 + 4x + 3}{x + 1}\,dx.$

Bitte wenden!

Lösung:

a) $\displaystyle\int (t-x)\,dx = tx - \frac{x^2}{2} + C.$

b) $\displaystyle\int (t-x)\,dt = \frac{t^2}{2} - xt + C.$

c) Wir nutzen $\frac{d}{dx}e^{x^2} = 2xe^{x^2}$ aus und erhalten

$$\int x\,e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int 2x\,e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + C.$$

d) Wir benutzen $\frac{d}{dx}(1+x^2)^{10} = 20x(1+x^2)^9$ und erhalten

$$\int x\,(1+x^2)^9\,dx = \frac{1}{20}(1+x^2)^{10} + C.$$

e) Da $x = 1$ eine Nullstelle des Zählers ist, spalten wir diese zunächst ab (Polynomdivision) und erhalten

$$1 - x^5 = (1-x)(1+x+x^2+x^3+x^4).$$

Damit ergibt sich

$$\int \frac{1-x^5}{1-x}\,dx = \int (1+x+x^2+x^3+x^4)\,dx = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + C.$$

f) $\displaystyle\int \frac{x^2+4x+3}{x+1}\,dx = \int \frac{(x+1)(x+3)}{x+1}\,dx = \int (x+3)\,dx = \frac{1}{2}x^2 + 3x + C.$

3. Ein Fahrzeug beschleunigt zunächst in einen Zeitraum von 20 Sekunden mit linear wachsender Geschwindigkeit von 0 auf 50 km/h, fährt dann 2 Minuten mit konstanter Geschwindigkeit und bremst anschliessend mit linear fallender Geschwindigkeit in einem Zeitraum von 30 Sekunden zum Stand. Welchen Weg hat das Fahrzeug zurückgelegt?

Lösung: Bevor wir beginnen legen wir uns darauf fest, dass wir die Zeit immer in Sekunden und die Geschwindigkeit immer in Meter pro Sekunde angeben. Mit dieser Konvention ergibt sich

$$50\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = \frac{50\cdot 1000\,\mathrm{m}}{60\cdot 60\,\mathrm{s}} = \frac{125}{9}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Trägt man die Geschwindigkeit in Meter pro Sekunde gegenüber der Zeit auf, so erhält man den folgenden Graph:

Siehe nächstes Blatt!

Die Fläche unter dem Graph entspricht nun dem zurückgelegten Weg s. Da die Fläche trapezförmig ist, ergibt sich

$$s = \frac{120\,\mathrm{s} + 170\,\mathrm{s}}{2} \cdot \frac{125\,\mathrm{m}}{9\,\mathrm{s}} = 2013.\overline{8}\,\mathrm{m} \approx 2\,\mathrm{km}.$$

Das Fahrzeug fährt also ca. zwei Kilometer bevor es anhält.

4. Es bezeichne p ein Polynom fünften Grades mit reellen Koeffizienten. Weiter bezeichne $r_p \geq 0$ bzw. $c_p \geq 0$ die mit Vielfachheit gezählten reellen bzw. komplexen, nicht-reellen Nullstellen von p.

a) Was sind r_p, c_p für $p(x) := x^5 + 1$?

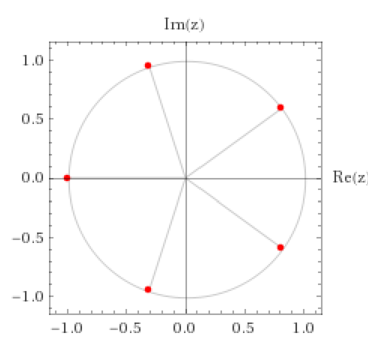
b) Begründe wieso immer gilt $r_p + c_p = 5$.

c) Wieso ist $r_p = 2$ und $c_p = 3$ niemals möglich?

d) Finde alle möglichen Werte von r_p. Gebe weiterhin jeweils ein Polynom p an, welches genau r_p mit Vielfachheit gezählte reelle Nullstellen hat.

Lösung:

a) Weil $(-1)^5 = -1$ ist -1 eine Nullstelle von p. Es bezeichne $\xi_k := e^{2\pi i \frac{k}{5}}$ für $k = 0, \ldots, 4$ die 5-ten Einheitswurzeln. Die Nullstellen von p sind also $-\xi_k$ für $k = 0, \ldots, 4$, weil $(-\xi_k)^5 = (-1)^5 \xi_k^5 = -1$. Für $k \geq 1$ ist ξ_k nicht-reell, also gilt $r_p = 1$ und $c_p = 4$. Dies kann man auch dem folgenden Bild entnehmen.



Bitte wenden!

b) Der Fundamentalsatz der Algebra besagt, dass jedes Polynom n-ten Grades mit Koeffizienten in $\mathbb{C}$ – also insbesondere auch mit Koeffizienten in $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ – genau n Nullstellen in $\mathbb{C}$ hat, wenn man ihre Vielfachheit berücksichtigt. Es folgt also $r_p + c_p = 5$.

c) Wir wissen, dass für eine Nullstelle $z \in \mathbb{C}$ auch $\overline{z}$ eine Nullstelle ist, wenn ein Polynom reelle Koeffizienten hat. Somit ist c_p immer durch 2 teilbar und der Fall $c_p = 3$ kann also nicht eintreten.

d) In der letzten Teilaufgabe haben wir gezeigt, dass c_p immer durch 2 teilbar sein muss. Weiterhin wissen wir wegen Teilaufgabe b), dass $c_p \leq 5$. Somit sind folgende Konstellationen denkbar:

1. $r_p = 1, c_p = 4$
2. $r_p = 3, c_p = 2$
3. $r_p = 5, c_p = 0$.

Die Konstellationen werden beispielsweise durch folgende Polynome realisiert

1. $p(x) = (x-1)(x^2+1)^2 = x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x - 1$,
2. $p(x) = (x-1)^3(x^2+1) = x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 3x - 1$,
3. $p(x) = (x-1)^5 = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1$.