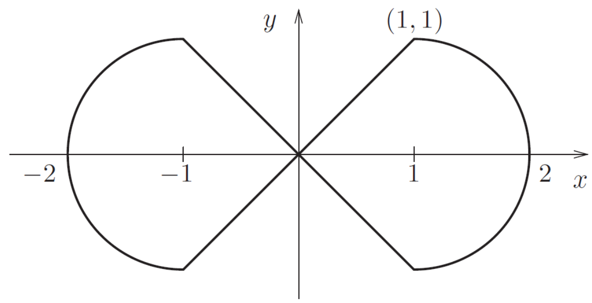
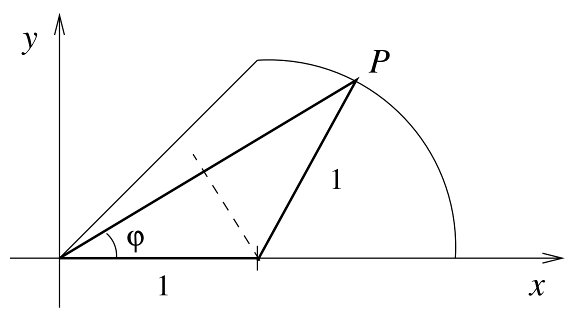
Lösung - Schnellübung 7

1. Berechne das polare Flächenträgheitsmoment der gezeichneten Fläche bezüglich des Koordinatenursprungs (man rechne mit Polarkoordinaten!), das heisst, dass Flächenträgheitsmoment bezüglich der z-Achse.



Lösung: Da das Gebiet symmetrisch ist, ist das polare Trägheitsmoment J_0 der ganzen Fläche gleich viermal dem Trägheitsmoment eines Viertels. Sei P ein Punkt auf einem der Halbkreise, und ϕ dessen Argument. Dann ist sein Abstand zum Koordinatenursprung gleich $2\cos\phi$, wie man aus folgender Figur entnimmt.



Damit ist nun in Polarkoordinaten

$$
\begin{aligned}
J_0 &= 4\int_0^{\pi/4}\int_0^{2\cos\phi} r^2\, r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi = 4\int_0^{\pi/4}\left[\frac{r^4}{4}\right]_{r=0}^{r=2\cos\phi}\mathrm{d}\phi = 4\int_0^{\pi/4} 4\cos^4\phi\,\mathrm{d}\phi \\
&= 4\int_0^{\pi/4}\left(1+\cos 2\phi\right)^2\mathrm{d}\phi = 4\underbrace{\int_0^{\pi/4}\mathrm{d}\phi}_{=\frac{\pi}{4}} + 4\underbrace{\int_0^{\pi/4} 2\cos 2\phi\,\mathrm{d}\phi}_{=\left[\sin 2\phi\right]_0^{\pi/4}} + 4\underbrace{\int_0^{\pi/4}\cos^2 2\phi\, d\phi}_{=\frac{\pi}{8}} \\
&= \frac{3\pi}{2} + 4.
\end{aligned}
$$

2. Es sei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ die Taylorreihe der Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$x \mapsto \frac{\sin x}{\cos(x^2)}.$$

Bestimme $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_6$.

Lösung: Die Funktion $g(x) = \frac{\sin x}{\cos(x^2)}$ ist ungerade. Daher sind alle geraden Koeffizienten

$$a_0 = a_2 = a_4 = a_6 = 0.$$

a_1, a_3 und a_5 findet man durch Koeffizientenvergleich. Aus

$$(a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \ldots) \cdot \left(1 - \frac{x^4}{2} + \ldots\right) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \ldots;$$

folgt: $a_1 = 1$, $a_3 = -\frac{1}{6}$ und $a_5 = \frac{61}{120}$.

3. Eine Funktion $f : (-\rho, \rho) \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch die Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} x^n.$$

a) Ermitte den Konvergenzradius ρ dieser Potenzreihe.

b) Bestimme eine Stammfunktion F von f derart, dass $F(0) = 0$. Stelle F zunächst als Potenzreihe und anschliessend als rationale Funktion dar.

c) Verwenden Sie F um eine Darstellung von f als rationale Funktion zu erhalten.

Lösung:

a) Um den Konvergenzradius zu bestimmen, verwenden wir die Definition (bekannt aus der Vorlesung):

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1) \cdot 2^{n+1}}{2^n \cdot (n+2)} = 2 \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{2}{n}} = 2.$$

b) Wir können Potenzreihen gliedweise integrieren, um an eine Stammfunktion zu gelangen. Das ergibt

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} x^n \,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{n+1}{2^n} x^n \,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{2^n} + C \overset{n+1=k}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{2^k} x^k + C. \end{aligned}$$

Aus der Forderung $F(0) = 0$ erhalten wir $C = 0$. Es gilt also $F(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2}{2^k} x^k$. Mit Hilfe der geometrischen Reihe können wir $F(x)$ als rationale Funktion schreiben:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{2^n} = x \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n = x \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{2}} = \frac{2x}{2-x}.$$

c) Da F eine Stammfunktion von f darstellt, gilt

$$f(x) = F'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{2x}{2-x} = \frac{2(2-x) + 2x}{(2-x)^2} = \frac{4}{(2-x)^2}.$$