D-MAVT/D-MATL Analysis I HS 2017
Dr. Andreas Steiger

Lösung - Serie 1

1. Frage 1

Welche der Aussagen sind richtig?

○ Eine divergente Folge ist nicht beschränkt.

Falsch. Z.B. ist $\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und divergent.

○ Jede beschränkte Folge ist konvergent.

Falsch. Z.B. ist $\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und divergent.

√ ○ Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Richtig. Dies folgt direkt aus der Definition der Konvergenz.

√ ○ Eine nicht beschränkte Folge divergiert.

Richtig. Das ist die Kontraposition der vorhergehenden Aussage. Sie folgt direkt aus der Definition der Konvergenz.

Frage 2

Gegeben sei die Folge $a_n = \frac{n}{n+1}$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Welche der folgenden Aussagen ist *falsch*?

○ Die Folge ist monoton wachsend.

○ Die Folge ist beschränkt.

√ ○ Die Folge ist eine Nullfolge.

○ Die Folge ist konvergent.

○ Der Limes der Folge ist 1.

Für alle $n \geq 1$ gilt

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)(n+1)}{n(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} > 1.$$

Da alle Folgenglieder positiv sind, folgt $a_{n+1} > a_n$, d.h. die Folge ist monoton wachsend. Weiter gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1.$$

Somit ist die Folge beschränkt und konvergiert gegen 1. Also ist die dritte Möglichkeit die einzige korrekte Antwort.

Frage 3

Der Grenzwert

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n^3-1}{10n^3+n+21}$$

ist gleich ...

√ ○ $\frac{1}{5}$.

○ 0.

○ ∞.

○ $\frac{1}{32}$.

○ $-\frac{1}{21}$.

Es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3-1}{10n^3+n+21} \underbrace{=}_{\substack{\text{Zähler und Nenner} \\ \text{dividiert durch } n^3}} \lim_{n\to\infty} \frac{2-\frac{1}{n^3}}{10+\frac{1}{n^2}+\frac{21}{n^3}}.$$

Da die Summanden $\frac{1}{n^3}$, $\frac{1}{n^2}$, $\frac{21}{n^3}$ jeweils eine Nullfolge bilden, wird der Grenzwert des Quotienten nach den Rechenregeln für Grenzwerte zu $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$.

Siehe nächstes Blatt!

Frage 4

Die Summe

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \dots$$

ist gleich ...

- ○ $\frac{1}{2}$.
- √ ○ $\frac{2}{3}$.
- ○ 2.
- ○ $\frac{3}{2}$.
- ○ ∞.

Die gegebene Summe definiert eine geometrische Reihe:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} q^n.$$

Da $|q| = \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} < 1$, konvergiert die geometrische Reihe und hat den Grenzwert $\frac{1}{1-q} = \frac{2}{3}$.

Bitte wenden!

Frage 5

Welche der untenstehenden Folgen divergieren?

- ◯ $a_n = \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}$.

  Die Folge konvergiert gegen die Eulersche Zahl e.

- $\surd$ ◯ $a_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$.

  Wird durch die harmonische Reihe minorisiert (das bedeutet die harmonische Reihe ist kleiner gleich) und ist deshalb divergent weil die harmonische Reihe divergent ist. Die harmonische Reihe ist divergent wegen:

  $1+1/2+(1/3+1/4)+(1/5+1/6+1/7+1/8)+\cdots+1/n \geq 1+1/2+(1/4+1/4)+(1/8+1/8+1/8+1/8)+\cdots+1/n$

  und deshalb $a_n \geq 1 + 1/2 + 1/2 + 1/2 + \cdots + 1/n$, was jeden Wert übersteigt wenn n genügend gross ist.

- $\surd$ ◯ $a_n = \frac{1}{1} + \cdots + \frac{1}{n}$.

  Harmonische Reihe und deshalb divergent

- $\surd$ ◯ $a_n = 1 + \cdots + n$.

  $a_n \geq n$ und deshalb divergent.

- ◯ Keine der Folgen divergiert.

2. Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Vereinfachen Sie soweit wie möglich (ohne Taschenrechner!).

a) $\frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} + \frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \frac{(1+\sqrt{2})^2 + (1-\sqrt{2})^2}{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})} = \frac{1+2\sqrt{2}+2+1-2\sqrt{2}+2}{1-2} = -6$

b) $\frac{a^2-b^2}{a-b} = \frac{(a+b)(a-b)}{a-b} = a+b.$

c) $\frac{a-b}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}} = \frac{ab(a-b)}{\frac{ab}{a}-\frac{ab}{b}} = \frac{ab(a-b)}{b-a} = -ab$

d) $\frac{3a+a^2}{a-8} - \frac{2a-2}{8+a} + (64-a^2)^{-1} \cdot (a^3+a^2+42a+31 \cdot 2^4)$

$$= \frac{(-3a-a^2)(8+a)}{(8-a)(8+a)} + \frac{(2-2a)(8-a)}{(8+a)(8-a)} + \frac{a^3+a^2+42a+8\cdot 62}{(8-a)(8+a)}$$

$$= \frac{-a^3-9a^2-42a+16}{64-a^2} + \frac{a^3+a^2+42a+8\cdot 62}{64-a^2} = \frac{-8a^2+8\cdot 64}{64-a^2} = 8.$$

3. Gegeben sei die Funktion

$$f:\ x \longmapsto \frac{x^2+2x-3}{x^3-x^2-2x}.$$

Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich und alle Nullstellen von f. Für welche Werte von x ist die Funktion f positiv? Für welche negativ? Skizzieren Sie den Graph $\Gamma(f)$. (Hinweis: für den

Siehe nächstes Blatt!

Graph können Sie z.B. das Bild ausgewählter Werte im Definitionsbereich berechnen und dann die Punkte miteinander verbinden. Was passiert mit der Funktion f in Umgebungen der Nullstellen des Nenners?)

Lösung: f ist eine rationale Funktion und lässt sich wie folgt faktorisieren

$$f\,:\, x \longmapsto \frac{x^2+2x-3}{x^3-x^2-2x} = \frac{(x+3)(x-1)}{x(x-2)(x+1)}.$$

Wie jede rationale Funktion, ist f überall in $\mathbb{R}$ ausser in den Nullstellen des Nenners definiert. Somit ist der maximale Definitionsbereich von f die Menge $\mathbb{R} \setminus \{-1,\ 0,\ 2\}$.

Die Nullstellen von f sind genau die Nullstellen des Zählers, nämlich -3 und 1.

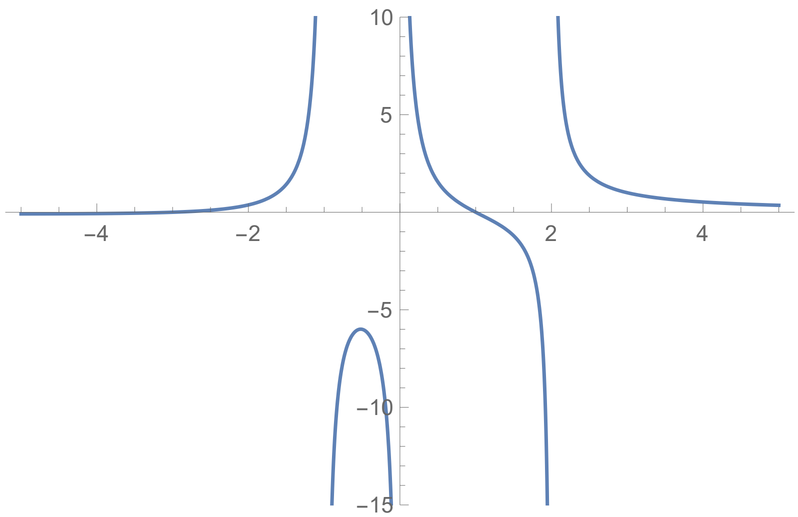
Nach Untersuchung der Vorzeichen der Faktoren im Zähler und im Nenner folgt, dass

$$P = (-3,\ -1) \cup (0,\ 1) \cup (2,\ \infty),$$

$$N = (-\infty,\ -3) \cup (-1,\ 0) \cup (1,\ 2),$$

wobei P die Menge, in der f positiv ist, und N die Menge, in der f negativ ist, bezeichnet.

Der Graph $\Gamma(f)$ ist:



4. Untersuchen Sie die nachstehenden Zahlenfolgen. Sind sie beschränkt? Sind sie monoton? Konvergieren sie, und falls ja, wie lautet ihr Grenzwert?

a) $a_n = \cos \frac{\pi n}{3}$

Offensichtlich ist $\{a_n\}$ nach unten durch -1 und nach oben durch 1 beschränkt. Die ersten zwei Folgenglieder sind

$$a_1 = \frac{1}{2}$$

und

$$a_2 = -\frac{1}{2}.$$

Bitte wenden!

Da $\cos$ bekanntlich 2π-periodisch ist, gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+6} = a_n.$$

Deshalb kann die Folge nur monoton sein oder konvergieren, wenn sie konstant ist. Das ist sie aber nicht. Also ist sie nicht monoton und konvergiert auch nicht.

b) $a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2} + \frac{n}{n^2}$

Es gilt

$$a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2} + \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n^2}(1 + \cdots + n) = \frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}.$$

Die Folge $\left\{\frac{1}{2n}\right\}$ ist beschränkt (durch 1 von oben und 0 von unten), monoton fallend und konvergiert gegen 0. Daher ist $\{a_n\}$ ebenfalls beschränkt, monoton fallend und konvergiert gegen $\frac{1}{2}$.

c) $a_n = \frac{3n^4-5n^2+2}{7n^4-4n^3}$

Wir rechnen wie üblich

$$a_n = \frac{3n^4 - 5n^2 + 2}{7n^4 - 4n^3} \cdot \frac{n^{-4}}{n^{-4}} = \frac{3 - 5n^{-2} + 2n^{-4}}{7 - 4n^{-1}}$$

und da der Nenner gegen 3 und der Zähler gegen 7 konvergiert, konvergiert $\{a_n\}$ gegen $\frac{3}{7}$. Insbesondere ist die Folge beschänkt. Monoton ist sie wegen

$$a_1 = 0 < \frac{3}{7} < \frac{200}{459} = a_3$$

jedoch nicht.

d) $a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2})$ für $n \geq 3$

Wir rechnen

$$\begin{aligned} a_{n+2} - a_{n+1} =& \frac{1}{2}(a_{n+1} + a_n) - a_{n+1} = -\frac{1}{2}(a_{n+1} - a_n) \\ =& \left(-\frac{1}{2}\right)^2 (a_n - a_{n-1}) = \cdots = \left(-\frac{1}{2}\right)^n. \end{aligned}$$

Daher gilt

$$a_n = a_1 + \sum_{k=0}^{n-2}(a_{k+2} - a_{k+1}) = \sum_{k=0}^{n-2}\left(-\frac{1}{2}\right)^k.$$

Das ist die Partialsummenfolge einer geometrischen Reihe mit Faktor $\left(-\frac{1}{2}\right)$ und konvergiert bekanntlich. Daher ist $\{a_n\}$ beschränkt. Offensichtlich ist sie nicht monoton. Der Grenzwert ist nach der Summenformel für die geometrische Reihe

$$\frac{1}{1 - (-1/2)} = \frac{2}{3}.$$

e) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

Wir rechnen

$$\begin{aligned} a_n =& \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})\frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ =& \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Die Folge ist offensichtlich monoton fallend, konvergiert gegen 0 und ist daher auch beschränkt.

Siehe nächstes Blatt!

f) $a_n = \sqrt{(n+1)n} - n$

Wegen

$$\begin{aligned} a_n =& \sqrt{(n+1)n} - n = \left(\sqrt{(n+1)n} - n\right) \frac{\sqrt{(n+1)n} + n}{\sqrt{(n+1)n} + n} \\ =& \frac{(n+1)n - n^2}{\sqrt{(n+1)n} + n} = \frac{n}{\sqrt{(n+1)n} + n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} \end{aligned}$$

ist die Folge monoton wachsend und konvergiert gegen $\frac{1}{2}$, daher ist sie auch beschränkt.

5. Fibonacci-Folge: Es sei die Folge (a_n) gegeben durch das rekursive Gesetz

$$a_0 := 1, a_1 := 1, \quad a_n := a_{n-1} + a_{n-2} \text{ für } n \geq 2.$$

Das Ziel dieser Aufgabe ist es den Grenzwert der Folge $b_n := \frac{a_n}{a_{n-1}}$, wobei $n \geq 1$, zu bestimmen.

a) Begründe wieso die Folge (a_n) monoton wachsend ist und wieso die Folge (b_n) beschränkt ist.

Lösung: Weil $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ und $a_{n-2} \geq 1$ für alle $n \geq 2$, folgt dass $a_n > a_{n-1}$ und deshalb divergiert die Folge (a_n). Es gilt

$$b_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{a_{n-1}} = 1 + \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}} = 1 + \frac{1}{b_{n-1}} \tag{1}$$

für alle $n \geq 2$. Somit $b_n \geq 1$ für alle $n \geq 2$ weil jedes Folgeglied von (b_n) nicht-negativ ist. Weil $b_1 = 1$ folgt deshalb $b_n \geq 1$ für alle $n \geq 1$. Eine Konsequenz davon ist, dass $\frac{1}{b_{n-1}} \leq 1$ und deshalb folgt wegen (1), dass $b_n \leq 2$. Wir haben also gezeigt, dass $1 \leq b_n \leq 2$ und die Folge (b_n) ist somit beschränkt.

b) Es sei

$$c_n := a_n a_{n-3} - a_{n-1} a_{n-2} \text{ für } n \geq 3.$$

Zeige dass $c_n = -c_{n-1}$ für alle $n \geq 4$.

Lösung: Wir berechnen

$$\begin{aligned} c_n &= a_n a_{n-3} - a_{n-1} a_{n-2} = (a_{n-1} + a_{n-2}) a_{n-3} - a_{n-1}(a_{n-3} + a_{n-4}) \\ &= a_{n-1} a_{n-3} + a_{n-2} a_{n-3} - a_{n-1} a_{n-3} - a_{n-1} a_{n-4} = a_{n-2} a_{n-3} - a_{n-1} a_{n-4} = -c_{n-1}, \end{aligned}$$

wie gewünscht.

c) Begründe wieso $c_n = (-1)^{n+1}$.

Lösung: Weil $a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3$, erhalten wir $c_3 = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 1$ und deshalb folgt $c_4 = -1$, $c_5 = 1, c_6 = -1$ und so weiter.

d) Verwende jeweils Teilaufgabe c) um zu zeigen, dass die Folge (b_{2n}), wobei $n \geq 1$, monoton fallend ist und dass die Folge (b_{2n+1}), wobei $n \geq 1$, monoton wachsend ist.

Lösung: Weil $c_n = (-1)^{n+1}$, folgt $c_{2n} = (-1)^{2n+1} = -1$ für alle $n \geq 1$. Also

$$a_{2n} a_{2n-3} - a_{2n-1} a_{2n-2} = -1,$$

folglich $a_{2n} a_{2n-3} - a_{2n-1} a_{2n-2} \leq 0$ und somit $a_{2n} a_{2n-3} \leq a_{2n-1} a_{2n-2}$, was äquivalent zu

$$b_{2n} = \frac{a_{2n}}{a_{2n-1}} \leq \frac{a_{2(n-1)}}{a_{2(n-1)-1}} = b_{2(n-1)}$$

ist. Deshalb ist die Folge (b_{2n}) monoton fallend. Komplett analog lässt sich zeigen, dass die Folge (b_{2n-1}) monoton steigend ist.

Bitte wenden!

e)* Begründe unter Zuhilfenahme der vorangehenden Teilaufgabe wieso die Folge (b_n) gegen *den goldenen Schnitt* $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ konvergiert.

Lösung: Die Folge (b_{2n}) ist wegen Teilaufgabe a) beschränkt und wegen Teilaufgabe d) monoton fallend. Folglich ist die Folge (b_{2n}) konvergent. Es gilt

$$b_{2n} = 1 + \frac{1}{b_{2n-1}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{b_{2(n-1)}}}.$$

und somit

$$\lim_{n\to+\infty} b_{2n} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} b_{2(n-1)}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} b_{2n}}}.$$

Wir setzen $x := \lim_{n\to+\infty} b_{2n}$. Wir haben also gezeigt:

$$x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}.$$

Auflösen nach x gibt

$$(x-1)(1+\frac{1}{x}) = 1$$

und somit $x + 1 - 1 - \frac{1}{x} = 1$, was äquivalent zu

$$x - \frac{1}{x} - 1 = 0$$

Durch multiplizieren der obigen Gleichung mit x erhält man

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Mit der quadratischen Lösungsformel erhält man $x = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$. Weil alle Folgeglieder von (b_{2n}) positiv sind, folgt dass $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Wie haben also gezeigt, dass die Folge (b_{2n}) gegen den goldenen Schnitt $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ konvergiert. Mit genau der gleichen Rechnung lässt sich zeigen, dass auch die Folge (b_{2n-1}) gegen den goldenen Schnitt φ konvergiert.

Wir müssen nun noch zeigen, dass auch die Folge (b_n) gegen den goldenen Schnitt konvergiert. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Weil die Folge (b_{2n}) konvergiert gibt es ein $N_1 \geq 1$ so dass für alle $n \geq N_1$ folgt $|b_{2n} - \varphi| < \varepsilon$. Weiterhin, weil die Folge (b_{2n+1}) konvergiert gibt es ein $N_2 \geq 1$ so dass für alle $n \geq N_2$ folgt $|b_{2n+1} - \varphi| < \varepsilon$. Setze $N := \max\{2N_1, 2N_2+1\}$. Nach Konstruktion gilt für alle $n \geq N$ dass $|b_n - \varphi| < \varepsilon$. Weil $\varepsilon > 0$ beliebig war, haben wir gezeigt, dass die Folge (b_n) gegen den goldenen Schnitt konvergiert, wie behauptet.