

Lösung - Serie 11

1. MC-Aufgaben (Online-Abgabe)

1. Wie gross ist die Oberfläche des Körpers, der durch Rotation der durch

$$y = \cos(x), \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

gegebenen Kurve um die x -Achse entsteht, ungefähr?

- ✓ (a) 14.424
(b) 19.961
(c) 28.847

Mit Hilfe der Parametrisierung

$$x(t) = t, \quad y(t) = \cos(x(t)) = \cos t, \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

erhalten wir nach der allgemeinen Formel die Oberfläche

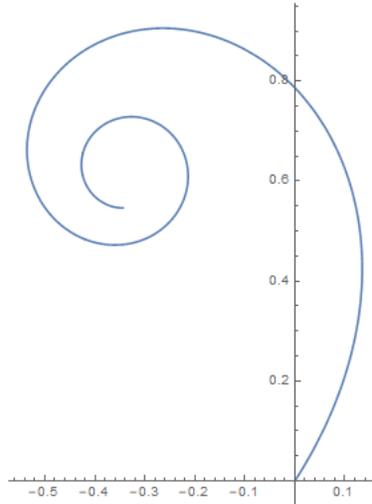
$$\begin{aligned} O &= 2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} y(t) \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt = 2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t \sqrt{1 + \sin^2 t} dt \\ &= 2\pi \int_{-1}^1 \sqrt{1+u^2} du = 2\pi \left[\frac{1}{2} \left(\operatorname{arsinh} u + u\sqrt{u^2+1} \right) \right]_{u=-1}^{u=1} \\ &= \pi \left[\operatorname{arsinh}(1) - \operatorname{arsinh}(-1) + \sqrt{2} - (-\sqrt{2}) \right] = 2\pi \left(\operatorname{arsinh}(1) + \sqrt{2} \right) \\ &= 2\pi \left[\ln \left(1 + \sqrt{1^2+1} \right) + \sqrt{2} \right] = 2\pi \left[\ln(1 + \sqrt{2}) + \sqrt{2} \right] \approx 14.424. \end{aligned}$$

Wir haben dabei $u = \sin t$ substituiert.

2. Die Kurve K ist gegeben durch die Parameterdarstellung

$$t \mapsto (x(t), y(t)) = \left(\int_1^t \frac{\cos(u)}{u} du, \int_1^t \frac{\sin(u)}{u} du \right),$$

wobei $t \in [1, 4\pi)$.



Was ist die Bogenlänge von K vom Koordinatenursprung bis zum ersten Punkt mit vertikaler Tangente?

- (a) $\frac{\pi}{2}$
- (b) π
- ✓ (c) $\ln\left(\frac{\pi}{2}\right)$
- (d) $\ln(\pi)$

Zur Parametrisierung $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ mit $t_A \leq t \leq t_B$ ist die Bogenlänge gegeben durch

$$s = \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt,$$

wir müssen zunächst also t_A und t_B bestimmen. Da wir im Punkt $(0, 0)$ starten sollen, gilt offensichtlich $t_A = 1$.

Der Tangentialvektor $\dot{r}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$ an die Kurve K ist vertikal, wenn $\dot{x}(t) = 0$ und $\dot{y}(t) \neq 0$ gilt. Mit dem Hauptsatz der Infinitesimalrechnung muss also

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt} \int_1^t \frac{\cos(u)}{u} du = \frac{\cos(t)}{t} = 0$$

und

$$\dot{y}(t) = \frac{d}{dt} \int_1^t \frac{\sin(u)}{u} du = \frac{\sin(t)}{t} \neq 0$$

Siehe nächstes Blatt!

gelten. Der erste Punkt mit vertikaler Tangente ist somit bei $t = \frac{\pi}{2}$. Die gesuchte Bogenlänge ist also

$$\begin{aligned} s &= \int_1^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt = \int_1^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(\frac{\cos t}{t}\right)^2 + \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2} dt \\ &= \int_1^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{t} = \left[\ln |t| \right]_1^{\frac{\pi}{2}} = \ln \left(\frac{\pi}{2} \right). \end{aligned}$$

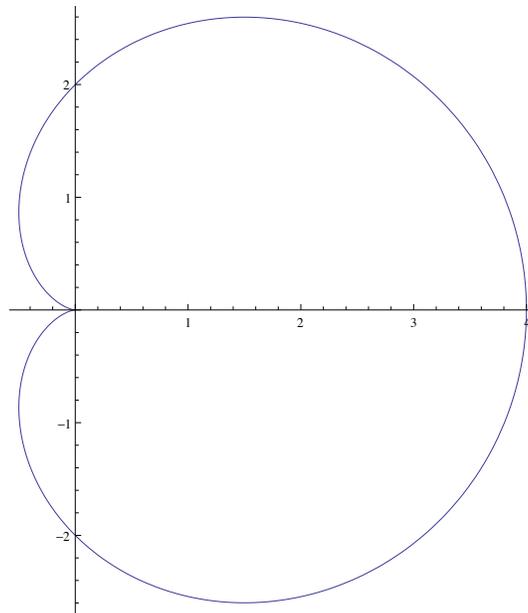
3. Es sei $a > 0$ eine Konstante. Was ist die Bogenlänge der *Kardioide*, gegeben in Polarkoordinaten durch $\varrho = 2a(1 + \cos \phi)$ für $\phi \in [0, 2\pi]$?

- (a) $8a$
- (b) $8\sqrt{2}a$
- ✓ (c) $16a$
- (d) $16\sqrt{2}a$
- (e) $32a$

Die Bogenlänge ist

$$\begin{aligned}
 s &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\varrho^2 + \dot{\varrho}^2} d\phi = 2a \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 + \cos \phi)^2 + \sin^2 \phi} d\phi \\
 &= 2a \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 + \cos \phi)} d\phi = 2a \int_0^{2\pi} \sqrt{4 \cos^2 \frac{\phi}{2}} d\phi = 4a \int_0^{2\pi} \left| \cos \frac{\phi}{2} \right| d\phi \\
 &= 8a \int_0^{\pi} |\cos u| du = 8a \left(\int_0^{\pi/2} \cos u du - \int_{\pi/2}^{\pi} \cos u du \right) = 8a(1 + 1) \\
 &= 16a.
 \end{aligned}$$

Skizze der Kardioide (mit $a = 1$):



Siehe nächstes Blatt!

4. Die Kurve K , gegeben in Parameterdarstellung durch

$$t \mapsto (x(t), y(t)) = e^{-t} (\cos(2t), \sin(2t)), \quad 0 \leq t \leq \pi/2,$$

rotiert um die x -Achse. Wie gross ist die dabei entstehende Oberfläche ungefähr?

(a) 2.317

✓ (b) 3.664

(c) 84.792

Es ist

$$\begin{aligned} O &= 2\pi \int_0^{\pi/2} y(t) \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt = 2\pi \int_0^{\pi/2} e^{-t} \sin(2t) \sqrt{5} e^{-t} dt \\ &= 2\pi \sqrt{5} \int_0^{\pi/2} e^{-2t} \sin(2t) dt = 2\sqrt{5} \pi \frac{e^{-2t}}{4+4} (-2 \sin(2t) - 2 \cos(2t)) \Big|_0^{\pi/2} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{2} \pi (e^{-\pi} + 1) \approx 3.664, \end{aligned}$$

wobei die Formel

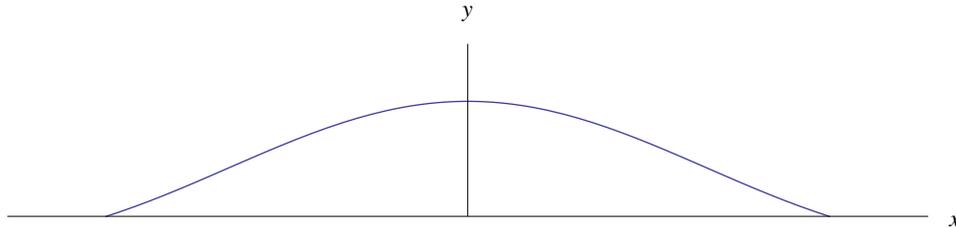
$$\int e^{ax} \sin(bx) dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin(bx) - b \cos(bx)) + C, \quad a, b, C \in \mathbb{R}$$

benutzt wurde. Sie lässt sich mittels partieller Integration herleiten.

5. Der Graph der Funktion $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = 0; \\ \frac{\sin x}{x} & \text{sonst} \end{cases}$$

wird um die y -Achse rotiert. Wie gross ist das Volumen des entstehenden Rotationskörpers?



- (a) $\frac{2}{3}\pi^3$
- (b) π^2
- (c) 3π
- ✓ (d) 4π

Wir zerlegen den Körper in dünne Hohlzylinder mit Innenradius x und Aussenradius $x + dx$. Ein solcher Hohlzylinder hat den Umfang $2\pi x$, die Höhe $\frac{\sin x}{x}$ und die Dicke dx , also das Volumen

$$dV = 2\pi x \frac{\sin x}{x} dx = 2\pi \sin x dx.$$

Das Gesamtvolumen ist somit

$$V = \int_0^\pi dV = 2\pi \int_0^\pi \sin x dx = 4\pi.$$

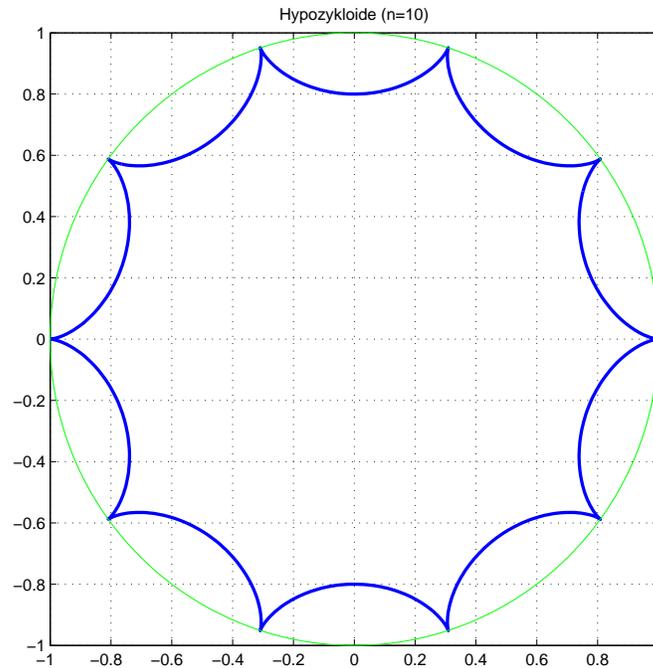
Siehe nächstes Blatt!

2. Es sei $n \geq 3$ eine ganze Zahl. Im Innern eines Kreises mit Radius 1 rolle ein kleiner Kreis C mit Radius $1/n$ ab. Ein Punkt der Peripherie des Kreises C beschreibt dann eine geschlossene Kurve K (eine *Hypozykloide*), welche durch die Parametrisierung ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$)

$$x(\varphi) = \frac{1}{n}((n-1)\cos\varphi + \cos((n-1)\varphi)),$$

$$y(\varphi) = \frac{1}{n}((n-1)\sin\varphi - \sin((n-1)\varphi))$$

beschrieben wird.



- a) Berechne in Abhängigkeit von n , die durch die Kurve K eingeschlossene Fläche.
 b) Für welche n ist diese Fläche grösser als $2/3$ der Fläche des grossen Kreises?

Lösung:

- a) Nach der Berechnung der Ableitungen von x und y erhält man

$$x(\varphi)\dot{y}(\varphi) = \frac{n-1}{n^2} \left((n-1)\cos^2\varphi - (n-2)\cos\varphi\cos((n-1)\varphi) - \cos^2((n-1)\varphi) \right),$$

$$\dot{x}(\varphi)y(\varphi) = -\frac{n-1}{n^2} \left((n-1)\sin^2\varphi + (n-2)\sin\varphi\sin((n-1)\varphi) - \sin^2((n-1)\varphi) \right).$$

Aus der Beziehung $\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta))$ erhalten wir für $\alpha = \varphi$ und $\beta = (n-1)\varphi$ die Gleichung

$$\cos(\varphi)\cos((n-1)\varphi) = \frac{1}{2}(\cos(n\varphi) + \cos((n-2)\varphi));$$

Daraus erhalten wir

$$x(\varphi)\dot{y}(\varphi) - \dot{x}(\varphi)y(\varphi) = \frac{(n-1)(n-2)}{n^2}(1 - \cos n\varphi).$$

Bitte wenden!

Die gesuchte Fläche ist somit gegeben durch die Formel für die Sektorfläche und wir erhalten

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} x(\varphi)\dot{y}(\varphi) - \dot{x}(\varphi)y(\varphi) d\varphi = \frac{(n-1)(n-2)}{2n^2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos n\varphi) d\varphi \\ &= \frac{(n-1)(n-2)}{2n^2} \left[\varphi - \frac{\sin n\varphi}{n} \right]_0^{2\pi} = \frac{(n-1)(n-2)}{2n^2} \cdot 2\pi \\ &= \frac{(n-1)(n-2)\pi}{n^2}. \end{aligned}$$

b) Der grosse Kreis hat Fläche π ; gesucht sind also die Zahlen $n = 3, 4, \dots$, für welche das Folgende gilt:

$$\begin{aligned} & \iff \frac{(n-1)(n-2)\pi}{n^2} > \frac{2}{3}\pi \\ & \iff 3n^2 - 9n + 6 > 2n^2 \\ & \iff n(n-9) + 6 > 0 \\ & \iff n = 9, 10, \dots \end{aligned}$$

3. Bestimmen Sie die Oberfläche des Rotationsellipsoids

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{16} = 1.$$

Lösung: Das Rotationsellipsoid $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{16} = 1$ entsteht durch Rotation der Ellipse

$$\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1$$

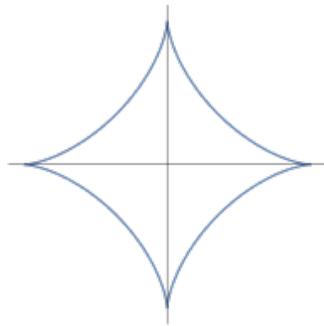
um die x -Achse. Hieraus erhält man $z = \left(16 \left(1 - \frac{x^2}{4}\right)\right)^{1/2} = \sqrt{4(4-x^2)}$. Es ist $x(t) = t$, $z(t) = \sqrt{4(4-t^2)}$, $\dot{z}(t) = \frac{-4t}{\sqrt{4(4-t^2)}}$ und $\dot{x}^2 + \dot{z}^2 = 1 + 4 \frac{t^2}{4-t^2}$. Jetzt kann man die Oberfläche O berechnen:

$$\begin{aligned} O &= \int_{-2}^2 2\pi z(t) \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2} dt = 2\pi \int_{-2}^2 2\sqrt{4-t^2} \sqrt{1 + 4 \frac{t^2}{4-t^2}} dt = 4\pi \int_{-2}^2 \sqrt{4+3t^2} dt \\ &= 8\pi \int_{-2}^2 \sqrt{1 + \frac{3}{4}t^2} dt \stackrel{(*)}{=} 8\pi \sqrt{\frac{4}{3}} \int_{-A}^A \cosh^2 s ds = 8\pi \sqrt{\frac{4}{3}} \left(2\sqrt{3} + \operatorname{arsinh}(\sqrt{3})\right) \\ &= 32\pi + \frac{16\pi}{\sqrt{3}} \operatorname{arsinh}(\sqrt{3}). \end{aligned}$$

Bei (*) wurde $\sqrt{\frac{3}{4}}t = \sinh s$ substituiert, und es ist $A = \operatorname{arsinh}(\sqrt{3})$.

Siehe nächstes Blatt!

4. Es sei die *Astroide* durch die folgende Parameterdarstellung gegeben:



$$\begin{aligned} x(t) &= a \cos^3 t \\ y(t) &= a \sin^3 t, \quad \text{für } 0 \leq t \leq 2\pi. \end{aligned}$$

Dabei ist $a > 0$ eine feste Zahl. Berechnen Sie in Abhängigkeit von a

- die Bogenlänge der Astroide;
- die Fläche des Astroidensterns;
- das Volumen des Rotationskörpers, der erhalten wird, wenn die Astroide um die x -Achse gedreht wird;
- die Oberfläche dieses Rotationskörpers.

Erinnerung: (für Teilaufgabe b)) Es sei

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass $I_2 = \frac{\pi}{4}$ und die Rekursionsformel

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

Weiter gilt:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx$$

Lösung:

- die Bogenlänge der Astroide;

Für unsere Rechnungen nutzen wir immer wieder die vorhandene Symmetrie aus; im ersten Quadranten läuft der Parameter t von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ und die gesamte Bogenlänge ist das Vierfache der Bogenlänge im ersten Quadranten, analog für die Fläche.

Mit $\dot{x}(t) = -3a \cos^2 t \sin t$ und $\dot{y}(t) = 3a \sin^2 t \cos t$ ergibt sich für die Bogenlänge der Astroide

$$\begin{aligned} s &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} \, dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3a \sqrt{\cos^4 t \sin^2 t + \sin^4 t \cos^2 t} \, dt \\ &= 12a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} \, dt = 12a \left[\frac{1}{2} \sin^2 t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 6a. \end{aligned}$$

Bitte wenden!

b) die Fläche des Astroidensterns;

Die Fläche des Astroidensterns ist

$$\begin{aligned} F &= 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x(t)y'(t) - \dot{x}(t)y(t)) dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3a^2(\cos^4 t \sin^2 t + \cos^2 t \sin^4 t)) dt \\ &= 6a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4 t(1 - \cos^2 t) + (1 - \sin^2 t) \sin^4 t) dt \\ &= 6a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t - \cos^6 t + \sin^4 t - \sin^6 t dt \end{aligned}$$

Wenn wir

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$$

schreiben, dann haben wir zusammen mit der Notation aus dem Hinweis

$$F = 6a^2(J_4 - J_6 + I_4 - I_6).$$

Wir widmen uns nun dem Hinweis und zeigen, dass $I_n = J_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \left(x - \frac{\pi}{2}\right) dx \\ &\stackrel{\substack{u=x-\frac{\pi}{2} \\ =\Delta x}}{=} \int_{u(0)}^{u(\pi/2)} \cos^n(u) du = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos^n(u) du \\ &\stackrel{(*)}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(u) du = J_n, \end{aligned}$$

wobei wir in (*) ausgenutzt haben, dass der Kosinus eine gerade Funktion ist, d.h. $\cos(-x) = \cos(x)$.

Damit gilt nun

$$F = 12a^2(I_4 - I_6).$$

Verwenden wir die Rekursionsformel

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

zusammen mit dem Ergebnis $I_2 = \frac{\pi}{4}$ erhalten wir

$$I_4 = \frac{3}{16}\pi, \quad I_6 = \frac{15}{96}\pi.$$

Somit ergibt sich der Flächeninhalt zu

$$F = 12a^2 \left(\frac{3\pi}{16} - \frac{15\pi}{96} \right) = \frac{3}{8}\pi a^2.$$

c) das Volumen des Rotationskörpers, der erhalten wird, wenn die Astroide um die x-Achse gedreht wird;

Der Schnitt des Körpers mit einer Ebene parallel zur (y, z) -Ebene ist ein Kreis.

Die implizite Darstellung der Kurve ist gegeben durch

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$$

Siehe nächstes Blatt!

wie man aus der Parameterdarstellung ablesen kann. Um den Radius des Schnittkreises zu berechnen, bestimmen wir lokal die explizite Darstellung zu $y(x) = (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$, welche für $0 \leq x \leq a$ gilt und damit die Kurve im ersten Quadranten beschreibt. Die Fläche des Kreises ist $\pi \cdot y(x)^2$, also erhalten wir als Volumen

$$V = 2 \int_0^a \pi y(x)^2 dx = 2 \int_0^a \pi \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} \right)^3 dx = 2\pi a^2 \int_0^a \left(1 - \left(\frac{x}{a} \right)^{\frac{2}{3}} \right)^3 dx.$$

Nun substituieren wir $u = \left(\frac{x}{a} \right)^{\frac{2}{3}}$, wir erhalten $x = au^{\frac{3}{2}}$ und $dx = \frac{3}{2}a\sqrt{u}du$ mit den Grenzen 0 und 1. Also gilt

$$\begin{aligned} V &= 2\pi a^2 \int_0^a \left(1 - \left(\frac{x}{a} \right)^{\frac{2}{3}} \right)^3 dx = 2\pi a^2 \cdot \frac{3}{2}a \int_0^1 (1-u)^3 \sqrt{u} du \\ &= 3\pi a^3 \int_0^1 (1-3u+3u^2-u^3)u^{\frac{1}{2}} du = 3\pi a^3 \int_0^1 u^{\frac{1}{2}} - 3u^{\frac{3}{2}} + 3u^{\frac{5}{2}} - u^{\frac{7}{2}} du \\ &= 3\pi a^3 \left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} - \frac{6}{5}u^{\frac{5}{2}} + \frac{6}{7}u^{\frac{7}{2}} - \frac{2}{9}u^{\frac{9}{2}} \right]_0^1 = \frac{32}{105}\pi a^3. \end{aligned}$$

d) die Oberfläche dieses Rotationskörpers.

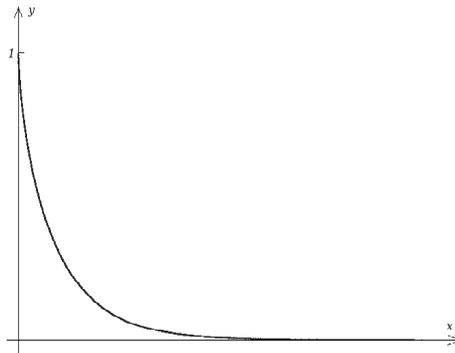
Gemäss der Formel für Oberflächenintegrale erhalten wir

$$\begin{aligned} O &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi y(t) \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2} dt = 12\pi a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos t dt \\ &= \frac{12}{5}\pi a^2 [\sin^5 t]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{12}{5}\pi a^2. \end{aligned}$$

5. Es sei $T \in (0, \infty)$ eine positive reelle Zahl. Die Kurve K in der (x, y) -Ebene sei durch die Parametrisierung

$$s \mapsto (x(s), y(s)) = \left(\int_0^s \sqrt{1 - e^{-2u}} du, e^{-s} \right), \quad s \in [0, T],$$

gegeben.



a) Bestimme den Oberflächeninhalt der durch Rotation von K um die x -Achse erzeugten Rotationsfläche in \mathbb{R}^3 in Abhängigkeit von T , sowie

Bitte wenden!

b) das Volumen des von dieser Rotationsfläche und den zwei Kreisscheiben

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0, y^2 + z^2 \leq 1\}$$

bzw.

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = x(T), y^2 + z^2 \leq e^{-T}\}$$

begrenzten Körpers, in Abhängigkeit von T .

c) Was passiert, wenn T gegen unendlich strebt?

Lösung:

a) Für die Berechnung des Oberflächeninhaltes wenden wir die Formel

$$F = 2\pi \int_0^T y(s) \sqrt{\dot{x}(s)^2 + \dot{y}(s)^2} ds$$

an. Die Ableitungen von x und y sind:

$$\begin{aligned} \dot{x}(s) &= \sqrt{1 - e^{-2s}} \quad (\text{Hauptsatz der Infinitesimalrechnung}) \\ \dot{y}(s) &= -e^{-s} \end{aligned}$$

Also ist $\sqrt{\dot{x}(s)^2 + \dot{y}(s)^2} = \sqrt{1 - e^{-2s} + e^{-2s}} = 1$. Mit diesen Daten berechnen wir jetzt den Flächeninhalt.

$$\begin{aligned} F &= 2\pi \int_0^T e^{-s} \cdot 1 ds = 2\pi \int_0^T e^{-s} ds \\ &= -2\pi e^{-s} \Big|_0^T = 2\pi (1 - e^{-T}). \end{aligned}$$

b) Das Volumen lässt sich durch die folgende Formel bestimmen:

$$V = \pi \int_0^T y^2 dx = \pi \int_0^T y(s)^2 \dot{x}(s) ds.$$

Also,

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^T e^{-2s} \sqrt{1 - e^{-2s}} ds = \pi \int_0^T e^{-2s} \sqrt{1 - e^{-2s}} ds \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^{1-e^{-2T}} u^{1/2} du = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2}{3} u^{3/2} \Big|_0^{1-e^{-2T}} \\ &= \frac{\pi}{3} (1 - e^{-2T})^{3/2}, \end{aligned}$$

wobei die Substitution $u = 1 - e^{-2s}$ angewandt wurde.

c) Wenn T gegen unendlich strebt, strebt e^{-T} gegen 0. Demnach nähert sich die Fläche dem Wert 2π , das Volumen dem Wert $\pi/3$ an.