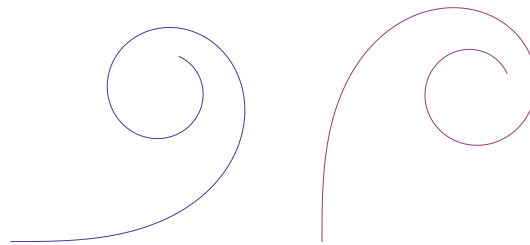


## Lösung - Serie 7

### 1. MC-Aufgaben (Online-Abgabe)

1. Gegeben sind die Kurven  $K_1$  (links) und  $K_2$  (rechts), die beide für wachsenden Parameter  $t$  von aussen nach innen durchlaufen werden. Es bezeichnen  $k_1(t)$  und  $k_2(t)$  die Krümmungen der beiden Kurven. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?



- ✓ (a)  $k_1$  ist positiv
- ✓ (b)  $k_2$  ist negativ
- ✓ (c)  $t \rightarrow k_1(t)$  ist monoton wachsend
- ✓ (d)  $t \rightarrow k_2(t)$  ist monoton fallend

Die erste Kurve krümmt sich nach links, also ist  $k_1$  positiv. Analog krümmt sich die zweite Kurve nach rechts, also ist  $k_2$  negativ. Die Krümmungskreis wird bei beiden Kurven kleiner, d.h. der Krümmungsradius  $1/|k|$  wird beidesmal kleiner. Das heisst, beide Krümmungen  $k_1$  und  $k_2$  sind im Absolutbetrag monoton wachsend. Da  $k_2$  negativ ist, muss dieses monoton fallend sein.

2. Betrachten Sie die Bernoulli'sche Spirale

$$\vec{r}(t) = (e^t \cos(t), e^t \sin(t)).$$

Bestimmen Sie, ob die folgende Aussage richtig oder falsch ist: Der Ortsvektor  $\vec{r}(t)$  eines Punktes auf der Spirale steht immer senkrecht auf seinem Tangentialvektor.

- (a) wahr  
✓ (b) falsch

Es gilt  $\dot{\vec{r}}(t) = (e^t \cos t - e^t \sin t, e^t \sin t + e^t \cos t)$  und damit

$$\begin{aligned} \langle \vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t) \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} e^t \cos t \\ e^t \sin t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^t \cos t - e^t \sin t \\ e^t \sin t + e^t \cos t \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= e^{2t}(\cos^2(t) - \cos(t) \sin(t) + \sin^2(t) + \sin(t) \cos(t)) \\ &= e^{2t} > 0, \text{ für alle } t. \end{aligned}$$

3. Was für eine Kurve stellt die Parametrisierung

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \sin(1 - t^2) \\ \cos(1 - t^2) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

dar?

- ✓ (a) Ein Kreis.

Es gilt

$$x^2(t) + y^2(t) = \sin^2(1 - t^2) + \cos^2(1 - t^2) = 1,$$

was der Kreisgleichung des Einheitskreises entspricht. Der Term  $1 - t^2$  nimmt auch alle Werte in  $[-2\pi, 0]$  an für  $t \in \mathbb{R}$ , also wird der gesamte Einheitskreis gezeichnet.

- (b) Eine Ellipse.  
(c) Eine Parabel.  
(d) Eine Gerade.  
(e) Ein anderes Objekt.  
(f) Diese Parametrisierung ist mathematisch nicht zulässig.

**Siehe nächstes Blatt!**

4. Es seien  $C, l \in (0, +\infty)$ . Die Bernoullische Spirale ist in Polarkoordinaten gegeben durch

$$\varrho = Ce^{l\varphi},$$

wobei  $\varphi \in \mathbb{R}$ . Welche der folgenden Aussagen sind *richtig*?

- ✓ (a) Der Winkel zwischen den Ortsvektor  $\vec{r}(\varphi)$  eines Punktes auf der Spirale und seinem Tangentialvektor  $\dot{\vec{r}}(\varphi)$  ist konstant.

Richtig. Eine Parametrisierung der Bernoullischen Spirale (Spira mirabilis) wird durch

$$\vec{r}(\varphi) = \begin{cases} x(\varphi) & = Ce^{l\varphi} \cos(\varphi) \\ y(\varphi) & = Ce^{l\varphi} \sin(\varphi) \end{cases}$$

gegeben, und also

$$\dot{\vec{r}}(\varphi) = \begin{cases} x(\varphi) & = Cle^{l\varphi} \cos(\varphi) - Ce^{l\varphi} \sin(\varphi) \\ y(\varphi) & = Cle^{l\varphi} \sin(\varphi) + Ce^{l\varphi} \cos(\varphi) \end{cases}$$

Der Winkel  $\alpha$  wird nach definition des Skalarproduktes folgenderweise berechnet:

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{r}(\varphi) \cdot \dot{\vec{r}}(\varphi)}{|\vec{r}(\varphi)| \cdot |\dot{\vec{r}}(\varphi)|} = \frac{C^2 l e^{2l\varphi}}{\sqrt{C^2 e^{2l\varphi}} \cdot \sqrt{C^2 l^2 e^{2l\varphi} + C^2 e^{2l\varphi}}} = \frac{l}{\sqrt{l^2 + 1}},$$

der unabhängig von  $\varphi$  ist.

- (b) Die Differenz der  $x$ -Koordinaten von zwei sukzessiven Schnittpunkten der Spirale mit der positiven  $x$ -Achse ist konstant.

Falsch. Sehen Sie bitte die Antwort c).

- ✓ (c) Der Quotient der  $x$ -Koordinaten von zwei sukzessiven Schnittpunkten der Spirale mit der positiven  $x$ -Achse ist konstant.

Richtig. Die Gleichung

$$y(\varphi) = Ce^{l\varphi} \sin(\varphi) = 0,$$

hat die Lösungen  $\varphi = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ . Die Schnittpunkte mit der positiven  $x$ -Achse sind also

$$(x(2\pi k), 0) = (Ce^{2l\pi k}, 0), k \in \mathbb{Z}.$$

Der Quotient ist also unabhängig von  $k$  und ist gleich

$$\frac{x(2\pi k)}{x(2\pi(k-1))} = \frac{Ce^{2l\pi k} \cos(2\pi k)}{Ce^{2l\pi(k-1)} \cos(2\pi(k-1))} = e^{2\pi l}.$$

- (d) Die Evolute der Bernoullischen Spirale mit  $C = l = 1$  ist die Kardiode.

Falsch. Im Spezialfall  $C = l = 1$  ist die Evolute der Bernoullische Spirale

$$\vec{r}(\varphi) = (e^\varphi \cos(\varphi), e^\varphi \sin(\varphi))$$

durch die Kurve

$$\vec{r}(\varphi) = (-e^\varphi \sin(\varphi), e^\varphi \cos(\varphi))$$

gegeben. Insbesondere kriegen wir diese Evolute durch einer Drehung der Spirale von  $\frac{\pi}{2}$  im Gegenuhrzeigersinn.

**Bitte wenden!**

5. Die maximale Krümmung der Kurve  $y = \ln(1 + e^x)$  ist

- (a)  $\frac{1}{3^{7/2}}$
- (b)  $\frac{1}{3^{5/2}}$
- (c)  $e^{3/2}$
- (d) 1
- ✓ (e)  $\frac{1}{\sqrt{27}}$

Parameterdarstellung der Kurve:  $\vec{r}(t) = (t, \ln(1 + e^t)) =: (x(t), y(t))$

Es gilt  $\dot{\vec{r}}(t) = \left(1, \frac{e^t}{1+e^t}\right)$  und  $\ddot{\vec{r}}(t) = \left(0, \frac{e^t}{(1+e^t)^2}\right)$  und damit erhält man die Krümmung

$$\begin{aligned} k(t) &= \frac{\ddot{y}(t) \dot{x}(t) - \ddot{x}(t) \dot{y}(t)}{(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\frac{e^t}{(1+e^t)^2}}{\left(1 + \frac{e^{2t}}{(1+e^t)^2}\right)^{3/2}} = \frac{e^t}{(1+e^t)^2} \frac{(1+e^t)^3}{(1+2e^t+2e^{2t})^{3/2}} \\ &= \frac{e^t + e^{2t}}{(1+2(e^t + e^{2t}))^{3/2}} = \frac{y}{(1+2y)^{3/2}} \quad \text{mit } y(t) := e^t + e^{2t} \end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned} u &:= y & \dot{u} &= \dot{y} \\ v &:= (1+2y)^{3/2} & \dot{v} &= \frac{3}{2}(1+2y)^{1/2} \cdot 2\dot{y} \end{aligned}$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} \dot{k}(t) &= \frac{v\dot{u} - u\dot{v}}{v^2} = \frac{(1+2y)^{3/2}\dot{y} - 3y\dot{y}(1+2y)^{1/2}}{(1+2y)^3} \\ &= \underbrace{\frac{\dot{y}}{(1+2y)^{3/2}}}_{>0} \left(1 - \frac{3y}{1+2y}\right) \end{aligned}$$

Es folgt mit  $\dot{k}(t) = 0$ , dass

$$1 - \frac{3y}{1+2y} = 0 \iff 1+2y - 3y = 0 \iff 1 - y = 0 \iff e^t + e^{2t} - 1 = 0 \quad (*)$$

Setze  $z := e^t$ , dann schreibt sich (\*)

$$0 = z^2 + z - 1$$

Es folgt

$$z_1 := z = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

( $z = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} < 0$  ist keine Lösung, da  $z = e^t > 0$ ). Wir erhalten, dass

$$t_1 := \ln(z_1) = \ln\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)$$

**Siehe nächstes Blatt!**

die Maximalstelle von  $k$  ist, da

$$\dot{k}(t) = \begin{cases} > 0 & \text{für } t > t_1 \\ < 0 & \text{für } t < t_1 \end{cases}$$

Die maximale Krümmung von  $k$  ist somit

$$k(t_1) = \frac{e^{t_1} + e^{2t_1}}{(1 + 2(e^{t_1} + e^{2t_1}))^{3/2}} = \frac{1}{3^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{27}}$$

wegen

$$e^{t_1} + e^{2t_1} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} + \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)^2 = 1$$

## 2. Gegeben ist die Parametrisierung der Kettenlinie

$$\vec{\gamma}: t \mapsto (t, \cosh t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

- a) Bestimmen Sie die Krümmungsfunktion  $t \mapsto k(t)$  der Kurve  $\vec{\gamma}$  sowie den Radius  $r_0$  und das Zentrum  $z_0$  des Krümmungskreises an der Stelle  $t = 0$ .
- b) Dieser Kreis (mit festem Radius  $r_0$ ) rolle entlang  $\vec{\gamma}$  ab.<sup>1</sup> Bestimmen Sie das Zentrum  $\vec{z}(t)$  des Kreises mit Berührungspunkt  $\vec{\gamma}(t)$  sowie den Geschwindigkeitsvektor der Kurve  $t \mapsto \vec{z}(t)$  zum Zeitpunkt  $t = 0$ .

### Lösung:

- a) Definiert man  $(x(t), y(t)) := (t, \cosh t) = \vec{\gamma}(t)$ , so kann man die Krümmung durch die folgende Formel bestimmen:

$$k(t) = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)}{(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2)^{3/2}}.$$

Wir haben  $\dot{\vec{\gamma}}(t) = (1, \sinh t)$  und  $\ddot{\vec{\gamma}}(t) = (0, \cosh t)$ . Dann ist

$$k(t) = \frac{\cosh t - 0}{(1 + \sinh^2 t)^{3/2}} = \frac{\cosh t}{(\cosh^2 t)^{3/2}} = \frac{1}{\cosh^2 t}.$$

Der Radius  $r_0$  des Krümmungskreises an der Stelle  $t = 0$  ist also

$$r_0 = \frac{1}{|k(0)|} = \frac{1}{\left|\frac{1}{\cosh^2(0)}\right|} = 1,$$

und sein Zentrum  $z_0$  ist durch die folgende Formel gegeben (Evolute):

$$z_0 = \vec{\gamma}(0) + r_0 \cdot \frac{n(0)}{\|n(0)\|},$$

wobei  $n: t \mapsto n(t) = (-\dot{y}(t), \dot{x}(t))$  der Normalenvektor ist, welcher aus einer Drehung von  $\dot{\vec{\gamma}}(t)$  im Gegenuhrzeigersinn entsteht. Für  $n$  gilt:

$$n(t) = (-\sinh t, 1); \quad \|n(t)\| = \sqrt{(-\sinh t)^2 + 1^2} = \cosh t.$$

Somit ist

$$z_0 = (0, 1) + 1 \cdot \frac{(-\sinh(0), 1)}{\|\cosh(0)\|} = (0, 2).$$

<sup>1</sup>Falls Sie  $r_0$  bei a) nicht berechnet haben, können Sie  $r_0 = 1$  annehmen.

b) Das Zentrum  $z(t)$  des Kreises mit Radius  $r_0$  und Berührungspunkt  $\vec{\gamma}(t)$  wird parametrisiert wie folgt:

$$\begin{aligned} z(t) &= \vec{\gamma}(t) + r_0 \cdot \frac{n(t)}{\|n(t)\|} = (t, \cosh t) + 1 \cdot \frac{(-\sinh t, 1)}{\cosh t} \\ &= \left( t - \tanh t, \cosh t + \frac{1}{\cosh t} \right). \end{aligned}$$

Der Geschwindigkeitsvektor dieser Kurve ist

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \left( 1 - \frac{1}{\cosh^2 t}, \sinh t - \frac{\sinh t}{\cosh^2 t} \right) = \frac{\cosh^2 t - 1}{\cosh^2 t} \cdot (1, \sinh t) \\ &= \tanh^2 t \cdot (1, \sinh t). \end{aligned}$$

Somit ist  $\dot{z}(0) = \tanh^2(0) \cdot (1, \sinh(0)) = (0, 0)$ .

3. Finden Sie eine Parameterdarstellung der Evolute der Kurve

$$x = 2 \cos t + \cos 2t, \quad y = 2 \sin t + \sin 2t.$$

**Lösung:** Für eine ebene Kurve mit der Parameterdarstellung  $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$  ist die Parameterdarstellung der Evoluten

$$\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) - y'(t) \frac{x'(t)^2 + y'(t)^2}{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)} \\ y(t) + x'(t) \frac{x'(t)^2 + y'(t)^2}{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)} \end{pmatrix}.$$

In unserem Fall sind

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 \cos t + \cos(2t) \\ 2 \sin t + \sin(2t) \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -2 \sin t - 2 \sin(2t) \\ 2 \cos t + 2 \cos(2t) \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -2 \cos t - 4 \cos(2t) \\ -2 \sin t - 4 \sin(2t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Rechnen wir zuerst

$$\begin{aligned} &\frac{x'(t)^2 + y'(t)^2}{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)} = \\ &= \frac{(-2 \sin t - 2 \sin(2t))^2 + (2 \cos t + 2 \cos(2t))^2}{(-2 \sin t - 2 \sin(2t))(-2 \sin t - 4 \sin(2t)) - (-2 \cos t - 4 \cos(2t))(2 \cos t + 2 \cos(2t))} = \\ &\quad \frac{4 + 4 + 8(\sin t \sin(2t) + \cos t \cos(2t))}{8 + 4 + 12(\sin t \sin(2t) + \cos t \cos(2t))} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

aus. Daher kriegen wir

$$\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cos t + \cos(2t) - (2 \cos t + 2 \cos(2t)) \frac{2}{3} \\ 2 \sin t + \sin(2t) + (-2 \sin t - 2 \sin(2t)) \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \cos t - \cos 2t \\ 2 \sin t - \sin 2t \end{pmatrix}.$$

4. Das *Kartesische Blatt* ist die Kurve  $C$  gegeben durch die Parameterdarstellung

$$x = \frac{t}{t^3 + 1}, \quad y = \frac{t^2}{t^3 + 1},$$

wobei  $-\infty < t < -1$  und  $-1 < t < +\infty$ .

**Siehe nächstes Blatt!**

- a) Bestimmen Sie die Gleichung, d.h. eine implizite Darstellung, von  $C$ .
- b) Bestimmen Sie die Schnittpunkte von  $C$  mit der ersten Winkelhalbierenden  $y = x$  sowie die Tangenten in diesen Schnittpunkten.
- c) In welchen Punkten sind die Tangenten parallel zu den Koordinatenachsen?

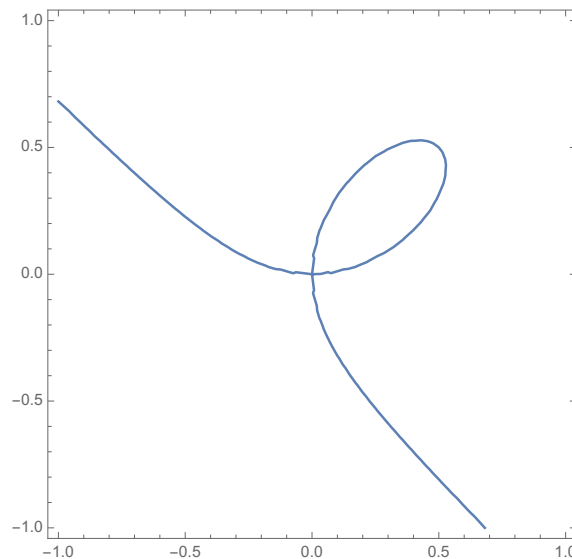
**Lösung:**

a) Aus

$$x^3 + y^3 = \frac{t^3}{(t^3 + 1)^3} + \frac{t^6}{(t^3 + 1)^3} = \frac{t^3}{(t^3 + 1)^2} = xy$$

ergibt sich die Gleichung

$$x^3 + y^3 - xy = 0.$$



Aus  $xy = \frac{t^3}{(t^3+1)^2}$  schliessen wir  $t^3 = \frac{1-2xy \pm \sqrt{1-4xy}}{2xy}$ , woher wir den Parameter  $t$  wieder zurückbekommen können für  $xy \neq 0$ .

b) Wir setzen  $x = y$  in der impliziten Gleichung für  $C$  und erhalten

$$x^3 + x^3 - x \cdot x = 0 \iff 2x^3 = x^2 \iff x = 0 \text{ oder } x = \frac{1}{2}.$$

$(x, y) = (0, 0)$  entspricht dem Parameter  $t = 0$ .

$(x, y) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  entspricht dem Parameter  $t = \left(\frac{1-2xy \pm \sqrt{1-4xy}}{2xy}\right)^{1/3}$ . Einsetzen ergibt also  $t = \left(\frac{1-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right)^{1/3} = 1$ .

Die Tangentensteigung berechnet sich zu

$$\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \frac{\frac{2t(t^3+1)-t^2 \cdot 3t^2}{(t^3+1)^2}}{\frac{(t^3+1)-t \cdot 3t^2}{(t^3+1)^2}} = \frac{2t(t^3+1) - t^2 \cdot 3t^2}{(t^3+1) - t \cdot 3t^2} = \frac{t(2-t^3)}{1-2t^3} = \begin{cases} 0, & t = 0 \\ -1, & t = 1. \end{cases}$$

Die Tangente durch  $(x, y) = (0, 0)$  ist diejenige zu  $t = 0$ , also

$$y = 0.$$

**Bitte wenden!**

Da die Kurve  $C$  symmetrisch ist bezüglich  $y = x$ , hat sie eine zusätzliche Tangente bei  $(0, 0)$ , und zwar die  $y$ -Achse  $x = 0$ .

Die Tangente durch  $(x, y) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  ist diejenige zu  $t = 1$ , also

$$y = -x + q$$

für  $q = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ , d. h.  $x + y - 1 = 0$ .

- c) Aus b) wissen wir, dass die Tangenten durch  $(0, 0)$  gerade die Koordinatenachsen sind. Es gibt aber noch mehr: Wir setzen die Steigung gleich Null und erhalten

$$\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \frac{t(2-t^3)}{1-2t^3} \stackrel{!}{=} 0 \implies t = 0 \text{ oder } t = \sqrt[3]{2}.$$

Das ergibt die Punkte  $(x, y) = (0, 0)$  und  $(\frac{\sqrt[3]{2}}{3}, \frac{\sqrt[3]{4}}{3})$ , wo die Tangenten horizontal, also parallel zur  $x$ -Achse sind.

Da die Kurve symmetrisch ist bezüglich  $y = x$ , sind die Tangenten in den Punkten  $(x, y) = (0, 0)$  und  $(\frac{\sqrt[3]{4}}{3}, \frac{\sqrt[3]{2}}{3})$  vertikal, d. h. parallel zur  $y$ -Achse.

5. Eine Kanonenkugel wird vom Punkt  $(0, 0)$  aus mit Geschwindigkeit  $v$  unter einem Winkel  $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$  gegenüber der positiven  $x$ -Achse abgeschossen. Behandelt man die Kugel als Punktmasse und orientiert die Schwerkraft in Richtung der negativen  $y$ -Achse, ist die Bewegung beschrieben durch:

$$\begin{aligned} x(t) &= v \cos(\varphi)t \\ y(t) &= v \sin(\varphi)t - 5t^2. \end{aligned}$$

- a) Wie muss der Winkel  $\varphi$  bei vorgegebenem  $v$  gewählt werden, damit die Kugel möglichst weit fliegt, bevor sie auf dem Boden (der  $x$ -Achse) auftrifft? Argumentieren Sie, warum es sich bei dem von Ihnen gefundenen Wert tatsächlich um ein Maximum handelt!
- b) Wo landet die Kugel bei diesem Abschusswinkel, wenn  $v = 100$  ist?

**Lösung:**

- a) Wir bestimmen zuerst den Landepunkt  $(x(t_*), y(t_*)) = (x_*, 0)$  für  $t_* > 0$  in abhängigkeit des Abschusswinkels  $\varphi$ . Es gilt

$$\begin{aligned} y(t_*) = 0 &\Leftrightarrow 5t_*^2 = v \sin(\varphi)t_* \\ &\Leftrightarrow t_* = \frac{1}{5}v \sin(\varphi). \end{aligned}$$

Folglich erhalten wir die Funktion  $x_*$  von  $\varphi$  gegeben durch

$$x_*(\varphi) = x(t_*)(\varphi) = \frac{1}{5}v^2 \cos \varphi \sin \varphi.$$

Um das Maximum zu bestimmen, berechnen wir die erste Ableitung nach  $\varphi$ .

$$\frac{dx_*}{d\varphi}(\varphi) = \frac{v^2}{5}(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{dx_*}{d\varphi}(\varphi) = 0 &\Leftrightarrow \cos \varphi = \sin \varphi \\ &\Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

**Siehe nächstes Blatt!**



Für  $\varphi < \frac{\pi}{4}$  gilt  $\frac{dx_*}{d\varphi}(\varphi) > 0$  und somit ist dort  $x_*(\varphi)$  monoton wachsend. Andererseits ist die Ableitung für  $\varphi > \frac{\pi}{4}$  negativ und folglich  $x_*(\varphi)$  monoton fallend. Also handelt es sich beim Funktionswert dazwischen um ein Maximum. Alternativ berechnet man die zweite Ableitung von  $x_*(\varphi)$

$$x_*''(\varphi) = -\frac{4}{5}v^2 \sin \varphi \cos \varphi$$

und setzt  $\varphi = \frac{\pi}{4}$  ein

$$x_*''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{2}{5}v^2 < 0.$$

Das zeigt ebenfalls, dass  $x_*$  ein Maximum bei  $\frac{\pi}{4}$  besitzt.

**b)** Wir berechnen

$$x_*\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{100^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{5} = 1000$$