

Schnellübung 2

Bemerkung: Diese Schnellübung wird am Mittwoch, dem 11. Oktober 2017, während der Übungsstunde gelöst.

1. Bestimmen Sie die Konstanten $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\beta \in \mathbb{R}$ derart, dass die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} x^2 - \alpha x + \beta, & x \leq -1; \\ (\alpha + \beta)x, & -1 < x < 1; \\ x^2 + \alpha x - \beta, & x \geq 1 \end{cases}$$

auf der ganzen reellen Achse stetig wird, und zeichnen Sie den resultierenden Graphen von f .

2. Zeige, dass die Gleichung

$$\frac{2}{(x+1)^4} + \frac{3}{(x-1)^9} = 0$$

eine Lösung $x \in (-1, 1)$ besitzt.

3. Es sei $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $x \mapsto x^3 - x$. Bestimme ein Intervall $I := [a, b)$ so dass $p: \mathbb{R} \setminus I \rightarrow \mathbb{R}$ bijektiv ist. *Tipp:* Bestimme die Nullstellen von p und skizziere den Graphen von p .

4. Es sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$x \mapsto \sin(3x) + 4 \sin(x)^3 - 3 \sin(x).$$

- a) Zeige, dass $f''(x) + 9f(x) = 0$.
(*Bemerkung:* Dies ist die Differentialgleichung des harmonischen Oszillators, welche später in der Vorlesung noch behandelt werden wird.)
- b) Benutze die Additionsformeln für \sin und \cos um zu zeigen, dass $f(x) = 0$.
- c) Zeige, dass die Gleichheit $-\cos(3x) + 4 \cos(x)^3 - 3 \cos(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. *Tipp:* $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$.