

Schnellübung 5

Bemerkung: Diese Schnellübung wird am Mittwoch, dem 22. November 2017, während der Übungsstunde gelöst.

1. a) Es sei $w = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ eine komplexe Zahl. Zeigen Sie, dass die beiden Lösungen z_1 und z_2 der Gleichung $z^2 = w$ durch

$$z_{1,2} = \pm \left(\sqrt{\frac{|w| + a}{2}} + i \operatorname{sgn}(b) \sqrt{\frac{|w| - a}{2}} \right)$$

gegeben sind. Dabei bezeichnet $\operatorname{sgn}: \mathbb{R} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ die Vorzeichenfunktion, gegeben durch

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & \text{falls } x < 0; \\ 0, & \text{falls } x = 0; \\ 1, & \text{falls } x > 0 \end{cases}$$

für eine reelle Zahl x .

- b) Berechnen Sie mithilfe von Teil (a) die komplexen Quadratwurzeln von $-3 + 4i$.

2. Bestimmen Sie

a) $\int (t - x) dx;$

d) $\int x(1 + x^2)^9 dx;$

b) $\int (t - x) dt;$

e) $\int \frac{1 - x^5}{1 - x} dx;$

c) $\int x e^{x^2} dx;$

f) $\int \frac{x^2 + 4x + 3}{x + 1} dx.$

3. Ein Fahrzeug beschleunigt zunächst in einen Zeitraum von 20 Sekunden mit linear wachsender Geschwindigkeit von 0 auf 50 km/h, fährt dann 2 Minuten mit konstanter Geschwindigkeit und bremst anschliessend mit linear fallender Geschwindigkeit in einem Zeitraum von 30 Sekunden zum Stand. Welchen Weg hat das Fahrzeug zurückgelegt?

Bitte wenden!

4. Es bezeichne p ein Polynom fünften Grades mit reellen Koeffizienten. Weiter bezeichne $r_p \geq 0$ bzw. $c_p \geq 0$ die mit Vielfachheit gezählten reellen bzw. komplexen, nicht-reellen Nullstellen von p .

a) Was sind r_p, c_p für $p(x) := x^5 + 1$?

b) Begründe wieso immer gilt $r_p + c_p = 5$.

c) Wieso ist $r_p = 2$ und $c_p = 3$ niemals möglich?

d) Finde alle möglichen Werte von r_p . Gebe weiterhin jeweils ein Polynom p an, welches genau r_p mit Vielfachheit gezählte reelle Nullstellen hat.