Serie 1

Die erste Aufgabe ist eine Multiple-Choice-Aufgabe (MC-Aufgabe), die online gelöst wird. Bitte schicken Sie Ihre Lösungen zu den Online MC-Fragen bis *Mittwoch, 4.10.2017 um 08:00 Uhr* ab.

Bemerkung: Bei einigen MC-Aufgaben sind mehrere Antworten richtig. Eine MC-Aufgabe ist dann korrekt gelöst und mit einem Punkt bewertet, wenn Sie genau die richtigen Antworten angeben. Andernfalls wird sie mit Null bewertet. Falls Sie die Lösung nicht wissen, raten Sie nicht. So erhalten wir eine gute Rückmeldung über allfällige Unklarheiten. Viel Erfolg!

Abgabetermin für die schriftlichen Aufgaben: *Mittwoch, 4.10.2017* in der Vorlesung.

Homepage der Vorlesung: `https://metaphor.ethz.ch/x/2017/hs/401-0261-GXL/`

MC-Aufgaben (Online-Abgabe)

1. **Frage 1**

   Welche der Aussagen sind richtig?

   ◯ Eine divergente Folge ist nicht beschränkt.

   ◯ Jede beschränkte Folge ist konvergent.

   ◯ Jede konvergente Folge ist beschränkt.

   ◯ Eine nicht beschränkte Folge divergiert.

Bitte wenden!

Frage 2

Gegeben sei die Folge $a_n = \frac{n}{n+1}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Welche der folgenden Aussagen ist *falsch*?

◯ Die Folge ist monoton wachsend.

◯ Die Folge ist beschränkt.

◯ Die Folge ist eine Nullfolge.

◯ Die Folge ist konvergent.

◯ Der Limes der Folge ist 1.

Frage 3

Der Grenzwert

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{2n^3 - 1}{10n^3 + n + 21}$$

ist gleich ...

◯ $\frac{1}{5}$.

◯ 0.

◯ ∞.

◯ $\frac{1}{32}$.

◯ $-\frac{1}{21}$.

Frage 4

Die Summe

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \dots$$

ist gleich ...

- ◯ $\frac{1}{2}$.
- ◯ $\frac{2}{3}$.
- ◯ 2.
- ◯ $\frac{3}{2}$.
- ◯ ∞.

Frage 5

Welche der untenstehenden Folgen divergieren?

- ◯ $a_n = \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!}$.
- ◯ $a_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$.
- ◯ $a_n = \frac{1}{1} + \dots + \frac{1}{n}$.
- ◯ $a_n = 1 + \dots + n$.
- ◯ Keine der Folgen divergiert.

2. Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Vereinfachen Sie soweit wie möglich (ohne Taschenrechner!).

a) $\dfrac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} + \dfrac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$

b) $(a^2 - b^2)/(a-b)$

c) $(a-b)/(\frac{1}{a} - \frac{1}{b})$

d) $\frac{3a+a^2}{a-8} - \frac{2a-2}{8+a} + (64-a^2)^{-1} \cdot (a^3 + a^2 + 42a + 31 \cdot 2^4)$

3. Gegeben sei die Funktion

$$f: \; x \longmapsto \frac{x^2+2x-3}{x^3-x^2-2x}.$$

Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich und alle Nullstellen von f. Für welche Werte von x ist die Funktion f positiv? Für welche negativ? Skizzieren Sie den Graph $\Gamma(f)$. (Hinweis: für den Graph können Sie z.B. das Bild ausgewählter Werte im Definitionsbereich berechnen und dann die Punkte miteinander verbinden. Was passiert mit der Funktion f in Umgebungen der Nullstellen des Nenners?)

4. Untersuche die nachstehenden Zahlenfolgen. Sind sie beschränkt? Sind sie monoton? Konvergieren sie, und falls ja, wie lautet ihr Grenzwert?

a) $a_n := \cos \frac{\pi n}{3}$

b) $a_n := \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2} + \frac{n}{n^2}$

c) $a_n := \frac{3n^4 - 5n^2 + 2}{7n^4 - 4n^3}$

d) $a_1 := 0, \quad a_2 := 1, \quad a_n := \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2})$ für $n \geq 3$

e) $a_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

f) $a_n := \sqrt{(n+1)n} - n$

5. Fibonacci-Folge: Es sei die Folge (a_n) gegeben durch das rekursive Gesetz

$$a_0 := 1, a_1 := 1, \quad a_n := a_{n-1} + a_{n-2} \text{ für } n \geq 2.$$

Das Ziel dieser Aufgabe ist es den Grenzwert der Folge $b_n := \frac{a_n}{a_{n-1}}$, wobei $n \geq 1$, zu bestimmen.

a) Begründe wieso die Folge (a_n) monoton wachsend ist und wieso die Folge (b_n) beschränkt ist.

b) Es sei

$$c_n := a_n a_{n-3} - a_{n-1} a_{n-2} \text{ für } n \geq 3.$$

Zeige dass $c_n = -c_{n-1}$ für alle $n \geq 4$.

c) Begründe wieso $c_n = (-1)^{n+1}$.

d) Verwende jeweils Teilaufgabe c) um zu zeigen, dass die Folge (b_{2n}), wobei $n \geq 1$, monoton fallend ist und dass die Folge (b_{2n+1}), wobei $n \geq 1$, monoton wachsend ist.

e)* Begründe unter Zuhilfenahme der vorangehenden Teilaufgabe wieso die Folge (b_n) gegen *den goldenen Schnitt* $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ konvergiert.