Serie 10

Die erste Aufgabe ist eine Multiple-Choice-Aufgabe (MC-Aufgabe), die online gelöst wird. Bitte schicken Sie Ihre Lösungen zu den Online MC-Fragen bis *Mittwoch, 6.12.2017 um 12:00 Uhr* ab.

Bemerkung: Bei einigen MC-Aufgaben sind mehrere Antworten richtig. Eine MC-Aufgabe ist dann korrekt gelöst und mit einem Punkt bewertet, wenn Sie genau die richtigen Antworten angeben. Andernfalls wird sie mit Null bewertet. Falls Sie die Lösung nicht wissen, raten Sie nicht. So erhalten wir eine gute Rückmeldung über allfällige Unklarheiten. Viel Erfolg!

Abgabetermin für die schriftlichen Aufgaben: *Mittwoch, 6.12.2017* in der Schnellübung.

Homepage der Vorlesung: `https://metaphor.ethz.ch/x/2017/hs/401-0261-GXL/`

---

1. MC-Aufgaben (Online-Abgabe)

1. Sei $f(x) := \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t^3+2}}$. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(a) $f(1) < 0$.

(b) $f(-1) > 0$.

(c) $f(-\frac{1}{2}) < 0$.

(d) $f(0) > 0$.

2. Berechne die Partialbruchzerlegung von

$$\frac{3x^2 - 2x + 3}{x^3 - x^2 - x + 1}.$$

(a) $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+1} + \frac{2}{(x-1)^2}$.

(b) $\frac{3}{x+1} + \frac{2}{x+1} + \frac{2}{(x-1)^2}$.

(c) $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+1} + \frac{2}{(x-1)^2}$.

(d) $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2}$

3. Welche der folgenden Subtitutionen kann verwendet werden, um das Integral $\int \frac{dx}{2+\cos(x)}$ als $\int \frac{2du}{3+u^2}$ auszudrücken?

(a) $u^2 = 2\cos(x) + 1$.

(b) $u = 2 + \cos(x)$.

(c) $u = \tan(x/2)$.

(d) $u = 4\tan(x)$.

4. Es sei $u = \sin(x)$. Durch Substitution folgt

$$\int_0^\pi x\sin(x)dx = \int_{u(0)}^{u(\pi)} \frac{xu}{du/dx} du = \int_0^0 \frac{xu}{du/dx} du = 0,$$

da $\int_a^a g(t)dt = 0$ für alle Funktionen g auf $\mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$ gilt. Allerdings folgt durch Verwendung der partiellen Integration, dass $\int_0^\pi x\sin(x)dx = [\sin(x) - x\cos(x)]_0^\pi = \pi \neq 0$ gilt. Welcher der folgenden Sätze beschreibt, worin der Fehler unserer Überlegungen liegt?

(a) Die Funktion $\sin(x) - x\cos(x)$ ist keine Stammfunktion von $x\sin(x)$.

(b) Die Grenzen der Integration sind falsch.

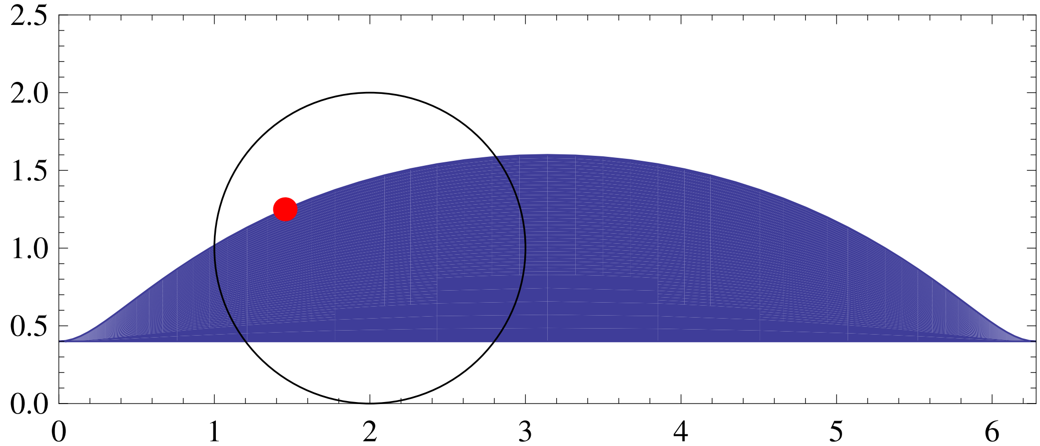
(c) $\int_a^a g(t)dt = 0$ stimmt nicht für alle Funktionen g.

(d) Wir können die Substitution $u = \sin(x)$ nicht verwenden, da die Funktion $x \mapsto \sin(x)$ auf dem Intervall $[0, \pi]$ nicht injektiv ist.

5. Die verkürzte Zykloide ist die Kurve die von einem Punkt auf einem rollenden Rad beschrieben wird. Eine Parameterdarstellung ist

$$\begin{cases} x(t) &= at - b\sin t \\ y(t) &= a - b\cos t, \end{cases}$$

mit $a > b > 0$. Berechnen Sie den Flächeninhalt der gefärbten Fläche.



(a) $(2a^2 + b^2 - 2ab)\pi$.

(b) $(2a^2 - 2a + b^2 + 2b)\pi$.

(c) $(2a^2 + b^2)\pi$.

(d) $(b^2 + 2ab)\pi$.

Bitte wenden!

2. Berechne die folgenden Integrale:

a) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}$ *(Hinweis: Substituiere $u^2 = e^x - 1$)*;

b) $\int \frac{x\,dx}{x^4 + 3}$ *(Hinweis: Substituiere $u = x^2$)*;

c) $\int \frac{1}{\cosh x}\,dx$;

d) $\int_3^4 x^3 \cos(x^2) dx$;

e) $\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{\arcsin\left(\sqrt{1 - 4x^2}\right)}{\sqrt{\frac{1}{4} - x^2}}\,dx$;

f) $\int \frac{x}{x^3 + x^2 - x - 1} dx$;

g) $\int \frac{2x^3 + 5x^2 + 4x + 1}{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 2} dx$ *(Hinweis: Das Polynom $x^2 + 1$ ist ein Faktor des Nenners.)*;

h) $\int \frac{x + 2}{x^4 + 2x^2} dx$.

3. Die *Kardioide* oder *Herzkurve* ist gegeben durch

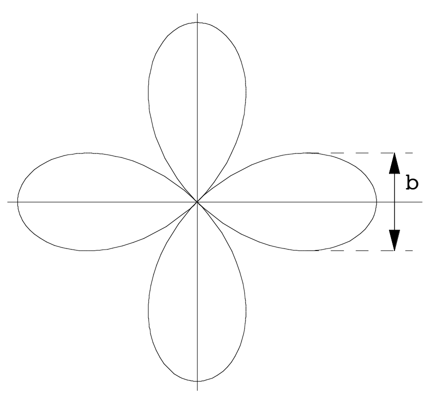
$$r(\varphi) = a(1 + \cos\varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi]$$

mit einer Konstante $a \in \mathbb{R}_{>0}$. Bestimmen Sie die Bogenlänge dieser Kurve.

4. Durch

$$\varrho = a\,|\cos(2\varphi)|$$

mit $a > 0$ wird in Polarkoordinaten der Rand eines Kleeblattes parametrisiert.



a) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Kleeblattes.

b) Bestimmen Sie die Breite b des Kleeblattes.

Siehe nächstes Blatt!

5. Berechnen Sie den Flächeninhalt den die folgenden Kurven im Bereich $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ einschliessen.

a) $r = \sqrt{\varphi}$

b) $r = \frac{1}{1+\varphi}$

c) $r = |\sin(\varphi)|$