Serie 11

Die erste Aufgabe ist eine Multiple-Choice-Aufgabe (MC-Aufgabe), die online gelöst wird. Bitte schicken Sie Ihre Lösungen zu den Online MC-Fragen bis *Mittwoch, 13.12.2017 um 12:00 Uhr* ab.

Bemerkung: Bei einigen MC-Aufgaben sind mehrere Antworten richtig. Eine MC-Aufgabe ist dann korrekt gelöst und mit einem Punkt bewertet, wenn Sie genau die richtigen Antworten angeben. Andernfalls wird sie mit Null bewertet. Falls Sie die Lösung nicht wissen, raten Sie nicht. So erhalten wir eine gute Rückmeldung über allfällige Unklarheiten. Viel Erfolg!

Abgabetermin für die schriftlichen Aufgaben: *Mittwoch, 13.12.2017* in der Vorlesung.

Homepage der Vorlesung: `https://metaphor.ethz.ch/x/2017/hs/401-0261-GXL/`

---

1. **MC-Aufgaben (Online-Abgabe)**

1. Wie gross ist die Oberfläche des Körpers, der durch Rotation der durch

$$y = \cos(x),\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

gegebenen Kurve um die x-Achse entsteht, ungefähr?

(a) 14.424

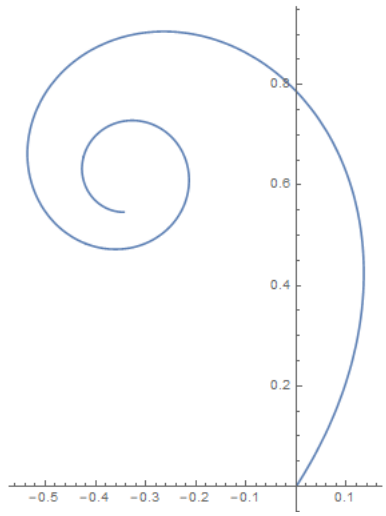
(b) 19.961

(c) 28.847

2. Die Kurve K ist gegeben durch die Parameterdarstellung

$$t \mapsto (x(t),\, y(t)) = \left(\int_1^t \frac{\cos(u)}{u} \mathrm{d}u,\, \int_1^t \frac{\sin(u)}{u} \mathrm{d}u \right),$$

wobei $t \in [1, 4\pi)$.



Was ist die Bogenlänge von K vom Koordinatenursprung bis zum ersten Punkt mit vertikaler Tangente?

(a) $\frac{\pi}{2}$

(b) π

(c) $\ln\left(\frac{\pi}{2}\right)$

(d) $\ln(\pi)$

3. Es sei $a > 0$ eine Konstante. Was ist die Bogenlänge der *Kardioide*, gegeben in Polarkoordinaten durch $\varrho = 2a(1 + \cos\phi)$ für $\phi \in [0, 2\pi]$?

(a) $8a$

(b) $8\sqrt{2}a$

(c) $16a$

(d) $16\sqrt{2}a$

(e) $32a$

4. Die Kurve K, gegeben in Parameterdarstellung durch

$$t \mapsto (x(t), y(t)) = e^{-t}\left(\cos(2t), \sin(2t)\right), \quad 0 \le t \le \pi/2,$$

rotiert um die x-Achse. Wie gross ist die dabei entstehende Oberfläche ungefähr?

(a) 2.317

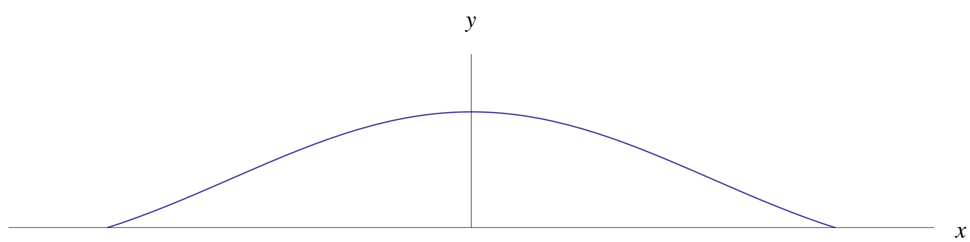
(b) 3.664

(c) 84.792

5. Der Graph der Funktion $f\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = 0; \\ \frac{\sin x}{x} & \text{sonst} \end{cases}$$

wird um die y-Achse rotiert. Wie gross ist das Volumen des entstehenden Rotationskörpers?



(a) $\frac{2}{3}\pi^3$

(b) π^2

(c) 3π

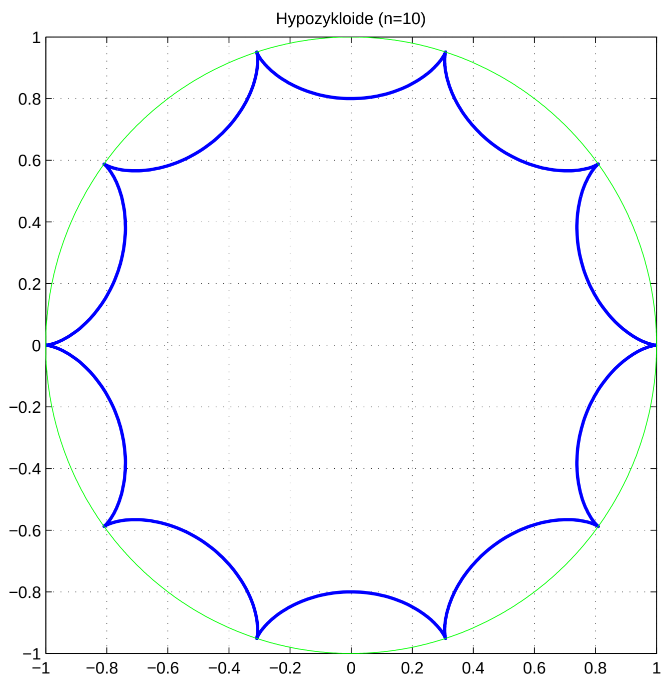
(d) 4π

Bitte wenden!

2. Es sei $n \geq 3$ eine ganze Zahl. Im Innern eines Kreises mit Radius 1 rolle ein kleiner Kreis C mit Radius $1/n$ ab. Ein Punkt der Peripherie des Kreises C beschreibt dann eine geschlossene Kurve K (eine *Hypozykloide*), welche durch die Parametrisierung $(0 \leq \varphi \leq 2\pi)$

$$x(\varphi) = \frac{1}{n}((n-1)\cos\varphi + \cos((n-1)\varphi)),$$
$$y(\varphi) = \frac{1}{n}((n-1)\sin\varphi - \sin((n-1)\varphi))$$

beschrieben wird.



a) Berechne in Abhängigkeit von n, die durch die Kurve K eingeschlossene Fläche.

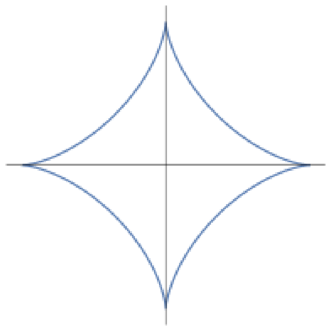
b) Für welche n ist diese Fläche grösser als $2/3$ der Fläche des grossen Kreises?

3. Bestimmen Sie die Oberfläche des Rotationsellipsoids

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{16} = 1.$$

Siehe nächstes Blatt!

4. Es sei die *Astroide* durch die folgende Parameterdarstellung gegeben:



$$x(t) = a\cos^3 t$$
$$y(t) = a\sin^3 t, \qquad \text{für } 0 \le t \le 2\pi.$$

Dabei ist $a > 0$ eine feste Zahl. Berechnen Sei in Abhängigkeit von a

a) die Bogenlänge der Astroide;

b) die Fläche des Astroidensterns;

c) das Volumen des Rotationskörpers, der erhalten wird, wenn die Astroide um die x-Achse gedreht wird;

d) die Oberfläche dieses Rotationskörpers.

Erinnerung: (*für Teilaufgabe b)*) Es sei

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass $I_2 = \frac{\pi}{4}$ und die Rekursionsformel

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

Weiter gilt:

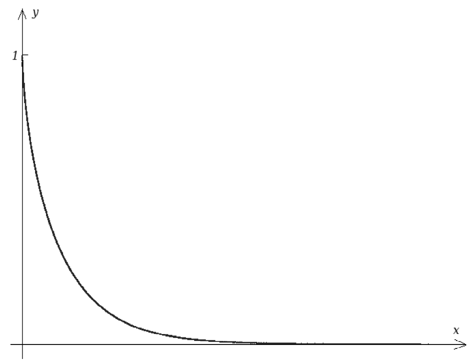
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx$$

5. Es sei $T \in (0,\infty)$ eine positive reelle Zahl. Die Kurve K in der (x,y)-Ebene sei durch die Parametrisierung

$$s \longmapsto (x(s), y(s)) = \left(\int_0^s \sqrt{1-e^{-2u}}\,\mathrm{d}u,\ e^{-s}\right), \quad s \in [0,T],$$

gegeben.

Bitte wenden!



a) Bestimme den Oberflächeninhalt der durch Rotation von K um die x-Achse erzeugten Rotationsfläche in $\mathbb{R}^3$ in Abhängigkeit von T, sowie

b) das Volumen des von dieser Rotationsfläche und den zwei Kreisscheiben

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0, y^2 + z^2 \leq 1\}$$

bzw.

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = x(T), y^2 + z^2 \leq e^{-T}\}$$

begrenzten Körpers, in Abhängigkeit von T.

c) Was passiert, wenn T gegen unendlich strebt?