D-MAVT/D-MATL | Analysis I | HS 2017
Dr. Andreas Steiger

Serie 13 - Ferienserie

Die erste Aufgabe ist eine Multiple-Choice-Aufgabe (MC-Aufgabe), die online gelöst wird. Bitte schicken Sie Ihre Lösungen zu den Online MC-Fragen bis *Mittwoch 10.01.2018* um 18:00 Uhr

Bemerkung: Bei einigen MC-Aufgaben sind mehrere Antworten richtig. Eine MC-Aufgabe ist dann korrekt gelöst und mit einem Punkt bewertet, wenn Sie genau die richtigen Antworten angeben. Andernfalls wird sie mit Null bewertet. Falls Sie die Lösung nicht wissen, raten Sie nicht. So erhalten wir eine gute Rückmeldung über allfällige Unklarheiten. Viel Erfolg!

Abgabetermin für die schriftlichen Aufgaben: Die Abgabe erfolgt in der Mittwochvorlesung in der ersten Vorlesungswoche im FS18.

Homepage der Vorlesung: `https://metaphor.ethz.ch/x/2017/hs/401-0261-GXL/`

MC-Aufgaben (Online-Abgabe)

1. Wenn man zwei beliebig oft differenzierbare Funktionen addiert, dann werden ihre Taylorreihen an einem Punkt x_0

(a) addiert.

(b) addiert, aber man erhält die Taylorreihe an der Stelle $2x_0$.

(c) addiert, aber man erhält die Taylorreihe an der Stelle x_0^2.

(d) es kann keine allgemein gültige Aussage getroffen werden.

2. Der Konvergenzradius der Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^k x^k$ ist

(a) 0

(b) $\frac{1}{2}$

(c) 2

(d) ∞

3. Es sei f die Funktion mit

$$f(x) = \frac{e^x}{x+1}.$$

Welches der folgende Polynome ist das zweite Taylor-Polynom $P_2(x)$ im Punkt $x_0 = 0$?

(a) $1 + \frac{x^2}{2}$

(b) $1 + x + \frac{x^2}{2}$

(c) $1 + x + x^2$

(d) $1 + x^2$

4. Die Entwicklung der Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ als Potenzreihe um $x_0 = 1$ lautet

(a) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (x-1)^k$

(b) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k$

(c) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k (x-1)^k$

(d) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k (x-1)^{k-1}$

5. In welchem Bereich konvergiert die Potenzreihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k^3(-1)^{k+1}(2x-1)^{2k}}{5^{2k}}$?

(a) $(-1, 2)$

(b) $(-4, 5)$

(c) $(-2, 2)$

(d) $(-2, 3)$

Siehe nächstes Blatt!

Übungsaufgaben

6. Berechne die Taylorreihe um $x_0 = 0$ der folgenden Funktionen f.

a) $f(x) = \sinh(x)$;

b) $f(x) = x^2 \ln(1 + x^4)$.

7. Bestimme die Taylorreihe um $x_0 = 0$ der Funktion

$$x \longmapsto \int_0^x \frac{1 - e^{-t^2}}{t^2} \mathrm{d}t.$$

8. Bestimme die Koeffizienten c_k der Reihenentwicklung

$$e^x \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \, x^k.$$

Hinweis: Man setze $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$ ein, multipliziere aus und verwende die Exponentialreihe.

9. Entwicke die Funktion

$$f(x) = \frac{2}{1 - x + x^2 - x^3}$$

in eine Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ und bestimme deren Konvergenzradius.

Hinweis: Führe zunächst eine Partialbruchzerlegung von $f(x)$ durch.

10. Berechne für die folgenden Potenzreihen den Konvergenzbereich $(x_0 - \varrho, x_0 + \varrho)$.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$;

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{5^{n^2} n^n} x^n$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{n} x^{2n}$;

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{\sqrt{n}} (x + 3)^n$.