D-MAVT/D-MATL | Analysis I | HS 2017
Dr. Andreas Steiger

Serie 2

Die erste Aufgabe ist eine Multiple-Choice-Aufgabe (MC-Aufgabe), die online gelöst wird. Bitte schicken Sie Ihre Lösungen zu den Online MC-Fragen bis *Mittwoch, 11.10.2017 um 08:00 Uhr* ab.

Bemerkung: Bei einigen MC-Aufgaben sind mehrere Antworten richtig. Eine MC-Aufgabe ist dann korrekt gelöst und mit einem Punkt bewertet, wenn Sie genau die richtigen Antworten angeben. Andernfalls wird sie mit Null bewertet. Falls Sie die Lösung nicht wissen, raten Sie nicht. So erhalten wir eine gute Rückmeldung über allfällige Unklarheiten. Viel Erfolg!

Abgabetermin für die schriftlichen Aufgaben: *Mittwoch, 11.10.2017* in der Schnellübung.

Homepage der Vorlesung: `https://metaphor.ethz.ch/x/2017/hs/401-0261-GXL/`

---

1. MC-Aufgaben (Online-Abgabe)

1. Welche der folgenden Funktionen $(-1, 1) \to \mathbb{R}$ sind strikt monoton wachsend?

(a) $x \mapsto x^2$

(b) $x \mapsto |x| + x$

(c) $x \mapsto x^3 - x$

(d) $x \mapsto e^x$

(e) $x \mapsto \arccos x$

(f) Keine.

2. Seien $a \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x^4-1} & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,\ 1\}\,, \\ a & \text{für } x \in \{-1,\ 1\}\,. \end{cases}$$

Für welches a ist f stetig an der Stelle 1?

(a) Für jedes a.

(b) $a = 1$

(c) $a = \frac{1}{4}$

(d) $a = 4$

(e) Ein solches a gibt es nicht.

3. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ x & 0 < x \leq 1 \\ \frac{x}{x+1} & x > 1 \end{cases}\,.$$

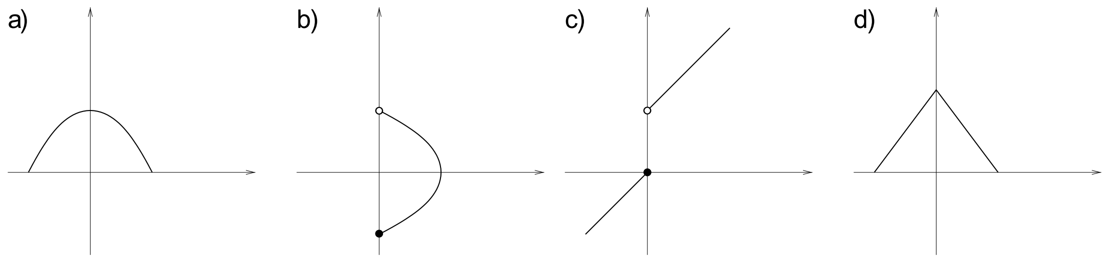
Welche der Aussagen gilt?

(a) f ist stetig.

(b) f ist stetig in 0.

(c) f ist stetig in 1.

4. Welche der folgenden Bilder sind Graphen von Funktionen?



(a) Bild (a).

(b) Bild (b).

(c) Bild (c).

(d) Bild (d).

5. Welche Funktionen sind konstant?

(a) $x \mapsto \sin(x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$.

(b) $x \mapsto \sin(x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

(c) $x \mapsto \sin(x) + \cos(x)$.

(d) $x \mapsto \sin^2(x) + \cos^2(x)$.

2. Bestimme die folgenden Grenzwerte.[1]

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{\sin(x)^2}}{x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{\sin(x)^2}}{x}$ e) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2}-x\right)\tan x$ f) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x}{2}\left(\frac{1}{\cos(\pi/x)}\right)^2 \sin(2\pi/x)$

3. Ausgehend von der Funktion f_1 zeichne man in einem Koordinatensystem mit der Einheit *2cm* die Graphen der Funktionen f_1 bis f_6. Beschreibe auch in Worten, wie die Graphen von f_2 bis f_6 aus f_1 hervorgehen.

a) $f_1 : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ b) $f_2 : x \mapsto \frac{1}{1+9x^2}$ c) $f_3 : x \mapsto \frac{8}{4+x^2}$

d) $f_4 : x \mapsto \frac{1}{2-2x+x^2}$ e) $f_5 : x \mapsto \frac{x^2}{1+x^2}$ f) $f_6 : x \mapsto \frac{1}{4}(x^2+4)$

4. Sei $x \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl. Gegeben sei das Polynom

$$p_x(y) = y^3 + 4y^2 + xy.$$

Wir definieren eine Funktion f durch

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto \text{ kleinste Nullstelle von } p_x(y)$$

Beschreibe f durch eine Formel und skizziere den Graphen von f. Ist f stetig?

5. Es sei $A := (x, y)$ ein Punkt auf dem Einheitskreis, d.h. $x^2 + y^2 = 1$. Weiter sei $B := (0, 0)$ der Ursprung des Koordinatensystems und $C := (x, 0)$ der Punkt auf der x-Achse mit derselben x-Koordinate wie A. Es bezeichne ABC des Dreieck mit den Eckpunkten A, B und C (siehe die Figur weiter unten). Wir definieren $\alpha \in [0, 2\pi]$ als die Länge des Kreisbogens von Punkt $(1, 0)$ bis zum Punkt A, wenn man den Einheitskreis im Gegenuhrzeigersinn durchläuft.

a) Skizziere das Dreieck ABC im Spezialfall $\alpha = \frac{\pi}{4}$ und berechne die Länge der Strecke $\overline{AC}$ in diesem Spezialfall. Was ist somit $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$? Und $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$?

b) Zeige unter Verwendung der Beziehungen im Dreieck ABC:

$$\cos(\alpha) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

für alle $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Wieso gilt somit

$$-\cos(\alpha) = \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$$

für alle $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$? (*Bemerkung*: Die hergeleiteten Beziehungen zwischen sin und cos in dieser Teilaufgabe gelten sogar für alle $\alpha \in \mathbb{R}$).

c) Zeige unter Verwendung der Beziehungen im Dreieck ABC:

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha),$$

für alle $\alpha \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$. (*Bemerkung*: Die hergeleitete Beziehung in dieser Teilaufgabe gilt sogar für alle $\alpha \in \mathbb{R}$).

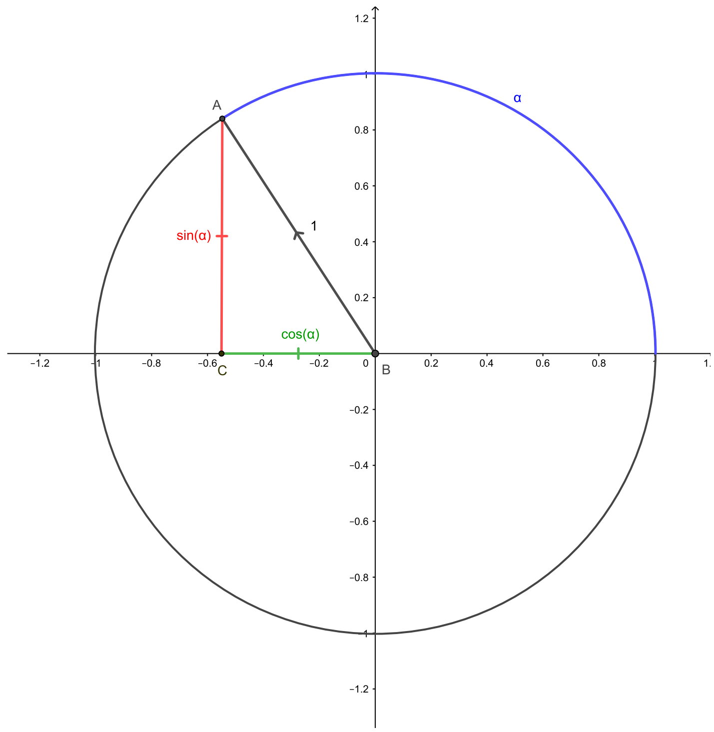
[1] Falls Sie die Regel von Bernoulli-l'Hôpital schon kennen, versuchen Sie bitte dennoch diese Grenzwerte *ohne* diese Regel zu berechnen.

Siehe nächstes Blatt!

d)* Es sei $\arctan$ die Umkehrfunktion von $\tan$. Zeige die Gleichheit

$$\sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

für alle $x \geq 0$ mit Hilfe eines geeigneten Dreiecks ABC. (Es ist sinnvoll ein Dreieck zu verwenden bei dem eine Seite die Länge 1 hat).



6. **Zusatzaufgabe zum Thema Folgen:** Aus einem Quadrat mit der Seitenlänge 1 werden sukzessive kleinere Quadrate ausgeschnitten, wie unten abgebildet. Die Seitenlängen der im Folgeschritt ausgeschnittenen Quadrate beträgt stets ein Drittel der vorhergehenden Seitenlänge. Wie gross ist der Flächeninhalt des im Grenzwert entstehenden Fraktals?