Serie 3

Die erste Aufgabe ist eine Multiple-Choice-Aufgabe (MC-Aufgabe), die online gelöst wird. Bitte schicken Sie Ihre Lösungen zu den Online MC-Fragen bis *Mittwoch, 18.10.2017 um 08:00 Uhr* ab.

Bemerkung: Bei einigen MC-Aufgaben sind mehrere Antworten richtig. Eine MC-Aufgabe ist dann korrekt gelöst und mit einem Punkt bewertet, wenn Sie genau die richtigen Antworten angeben. Andernfalls wird sie mit Null bewertet. Falls Sie die Lösung nicht wissen, raten Sie nicht. So erhalten wir eine gute Rückmeldung über allfällige Unklarheiten. Viel Erfolg!

Abgabetermin für die schriftlichen Aufgaben: *Mittwoch, 18.10.2017* in der Vorlesung.

Homepage der Vorlesung: `https://metaphor.ethz.ch/x/2017/hs/401-0261-GXL/`

---

1. MC-Aufgaben (Online-Abgabe)

1. Es sei die Funktion $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ definiert durch $f(x) = \ln(x^2+1)$, wobei der Logarithmus $\ln$ zur Basis e ist. Welche Gleichung beschreibt die Umkehrfunktion $f^{-1}\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$?

(a) Die Umkehrfunktion existiert nicht.

(b) $f^{-1}(x) = \ln(x^2-1)$

(c) $f^{-1}(x) = e^{x^2+1}$

(d) $f^{-1}(x) = e^{x-1}$

(e) $f^{-1}(x) = \sqrt{e^x-1}$

2. Es sei $f(x) = \cos(x^2)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

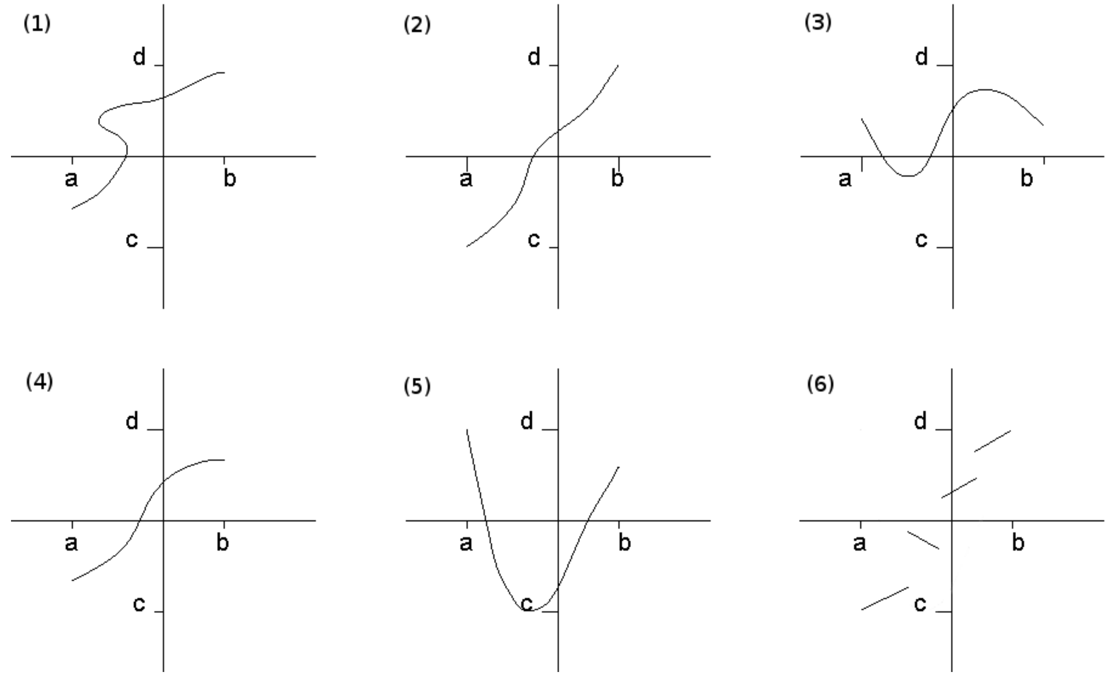
(a) Es sei $D = [\sqrt{\pi}, \sqrt{2\pi}]$. Dann ist die Funktion $f\colon D \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x)$ injektiv.

(b) Das Bild von D unter f, also $\{f(x) : x \in D(f)\}$, ist gleich $[0,1]$.

(c) Die Funktion $g : \left[0, \sqrt{1/2}\right] \to [\sqrt{\pi}/2, \sqrt{\pi}/\sqrt{2}]$ gegeben durch $g(x) = \sqrt{\arccos x}$ ist die Umkehrfunktion von der Funktion $f\colon [\sqrt{\pi}/2, \sqrt{\pi}/\sqrt{2}] \to \left[0, \sqrt{1/2}\right],\ x \mapsto f(x)$.

Bitte wenden!

3. Welche der folgenden Bilder beschreiben den Graph einer injektiven Funktion $[a, b] \to [c, d]$?



(a) (1)

(b) (2)

(c) (3)

(d) (4)

(e) (5)

(f) (6)

Siehe nächstes Blatt!

4. Eine Funktion g heisst *Asymptote* einer Funktion f für $x \to \infty$, falls $\lim_{x\to\infty} \big(f(x) - g(x)\big) = 0$ gilt. Es sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \frac{e^{2x} + 1}{e^x + 1}.$$

Welche der folgenden Funktionen ist eine Asymptote von f für $x \to \infty$?

(a) $g(x) = e^x$

(b) $g(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$

(c) $g(x) = e^x - 1$

(d) $g(x) = e^x - e^{-x}$

(e) $g(x) = e^{-x}$

5. Es sei $f(x) = \frac{x^3-1}{2x^3+1}$. Welche Aussage ist richtig?

(a) $f'(x) = \frac{-36x^2(x^3-1)^3}{(2x^3+1)^5}$

(b) $f'(x) = \frac{9x^2}{(1+2x^3)^2}$

(c) $f'(x) = \frac{36x^2(x^3-1)^3}{(2x^3+1)^4}$

(d) $f'(x) = \frac{72x^2(x^3-1)^3}{(2x^3+1)^5}$

2. Gegeben seien die Funktionen

$$\begin{aligned}
&f_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, && x \mapsto 2x - 6\\
&f_2\colon \mathbb{R} \to [0,\infty), && x \mapsto |x|\\
&f_3\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, && x \mapsto \min\{x^2 - 9, 0\}\\
&f_4\colon \mathbb{R} \setminus \{3\} \to \mathbb{R}, && x \mapsto \tfrac{x+1}{f_1(x)}.
\end{aligned}$$

a) Untersuche alle Funktionen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

b) Skizziere auf dem Intervall $[-5, 5]$ die Funktionen $g := f_3 - f_1$,

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto f_3(x) - f_1(x),$$

und $h := f_2 \circ g$,

$$h : \mathbb{R} \to [0,\infty), \qquad x \mapsto f_2(g(x)).$$

c) Bestimme die Umkehrfunktion $f_4^{-1} : W(f_4) \to \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

(*Hinweis:* Sie müssen $W(f_4) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$ hierzu nicht explizit berechnen.)

3. **a)** Gegeben sei die Funktion f mit Definitionsbereich $D(f) = (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ durch die Abbildungsvorschrift $f(x) = \tan(x)$. Bestimme die inverse Funktion von f.

b) Es sei $a \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt. Finden Sie alle reellen Lösungen x der Gleichung

$$\tan\bigl(\pi\bigl(1 + \tfrac{1}{2}\cos(x)\bigr)\bigr) = a.$$

4. Bestimme bei jeder der folgenden Funktionen, welche für alle reellen Zahlen $t > 0$ definiert sind, jeweils eine Asymptote der Form $at + b$ für $t \to +\infty$:

a) $f(t) = \frac{t}{t+\sqrt{t}}$;

b) $g(t) = \sqrt{4t^2 + 3}$;

c) $h(t) = 3t + \cos(1/t)$;

d) $i(t) = \ln(1 + e^t)$.

Zeichne die Graphen der Funktionen und die dazugehörigen Asymptoten.

5. Berechne $f'\colon D(f) \to \mathbb{R}$ für

a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x\sin(x)$;

b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x^2+3}$;

c) $f\colon (0,\pi) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{\sin x}$;

d) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^{-x}$;

e) $f\colon (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R},\ x \mapsto (\tan x)^2$;

f) $f\colon \mathbb{R}_{\geq 1} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{\ln x}$;

g) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$;

h) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} x^2\sin(\frac{1}{x}) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$.

*Zeige, dass die Ableitung der Funktion aus Teilaufgabe **h)** im Punkt $x = 0$ nicht stetig ist.