Serie 7

Die erste Aufgabe ist eine Multiple-Choice-Aufgabe (MC-Aufgabe), die online gelöst wird. Bitte schicken Sie Ihre Lösungen zu den Online MC-Fragen bis *Mittwoch, 15.11.2017 um 12:00 Uhr* ab.

Bemerkung: Bei einigen MC-Aufgaben sind mehrere Antworten richtig. Eine MC-Aufgabe ist dann korrekt gelöst und mit einem Punkt bewertet, wenn Sie genau die richtigen Antworten angeben. Andernfalls wird sie mit Null bewertet. Falls Sie die Lösung nicht wissen, raten Sie nicht. So erhalten wir eine gute Rückmeldung über allfällige Unklarheiten. Viel Erfolg!

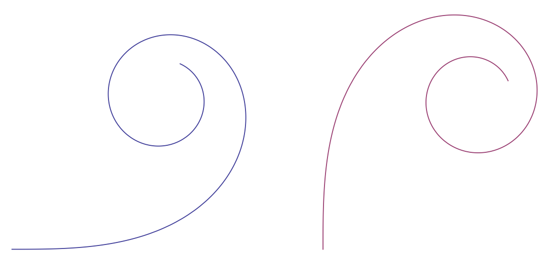
Abgabetermin für die schriftlichen Aufgaben: *Mittwoch, 15.11.2017* in der Vorlesung.

Homepage der Vorlesung: `https://metaphor.ethz.ch/x/2017/hs/401-0261-GXL/`

---

1. MC-Aufgaben (Online-Abgabe)

1. Gegeben sind die Kurven K_1 (links) und K_2 (rechts), die beide für wachsenden Parameter t von aussen nach innen durchlaufen werden. Es bezeichnen $k_1(t)$ und $k_2(t)$ die Krümmungen der beiden Kurven. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?



(a) k_1 ist positiv

(b) k_2 ist negativ

(c) $t \to k_1(t)$ ist monoton wachsend

(d) $t \to k_2(t)$ ist monoton fallend

2. Betrachten Sie die Bernoulli'sche Spirale

$$\vec{r}(t) = \left(e^t \cos(t), e^t \sin(t)\right).$$

Bestimmen Sie, ob die folgende Aussage richtig oder falsch ist: Der Ortsvektor $\vec{r}(t)$ eines Punktes auf der Spirale steht immer senkrecht auf seinem Tangentialvektor.

(a) wahr

(b) falsch

3. Was für eine Kurve stellt die Parametrisierung

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \sin(1-t^2) \\ \cos(1-t^2) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

dar?

(a) Ein Kreis.

(b) Eine Ellipse.

(c) Eine Parabel.

(d) Eine Gerade.

(e) Ein anderes Objekt.

(f) Diese Parametrisierung ist mathematisch nicht zulässig.

4. Es seien $C, l \in (0, +\infty)$. Die Bernoullische Spirale ist in Polarkoordinaten gegeben durch

$$\varrho = Ce^{l\varphi},$$

wobei $\varphi \in \mathbb{R}$. Welche der folgenden Aussagen sind *richtig*?

(a) Der Winkel zwischen den Ortsvektor $\vec{r}(\varphi)$ eines Punktes auf der Spirale und seinem Tangentialvektor $\dot{\vec{r}}(\varphi)$ ist konstant.

(b) Die Differenz der x-Koordinaten von zwei sukzessiven Schnittpunkten der Spirale mit der positiven x-Achse ist konstant.

(c) Der Quotient der x-Koordinaten von zwei sukzessiven Schnittpunkten der Spirale mit der positiven x-Achse ist konstant.

(d) Die Evolute der Bernoullischen Spirale mit $C = l = 1$ ist die Kardiode.

5. Die maximale Krümmung der Kurve $y = \ln(1 + e^x)$ ist

(a) $\frac{1}{3^{7/2}}$

(b) $\frac{1}{3^{5/2}}$

(c) $e^{3/2}$

(d) 1

(e) $\frac{1}{\sqrt{27}}$

2. Gegeben ist die Parametrisierung der Kettenlinie

$$\vec{\gamma}\colon t \mapsto (t, \cosh t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

a) Bestimmen Sie die Krümmungsfunktion $t \mapsto k(t)$ der Kurve $\vec{\gamma}$ sowie den Radius r_0 und das Zentrum z_0 des Krümmungskreises an der Stelle $t = 0$.

b) Dieser Kreis (mit festem Radius r_0) rolle entlang $\vec{\gamma}$ ab.[1] Bestimmen Sie das Zentrum $\vec{z}(t)$ des Kreises mit Berührpunkt $\vec{\gamma}(t)$ sowie den Geschwindigkeitsvektor der Kurve $t \mapsto \vec{z}(t)$ zum Zeitpunkt $t = 0$.

3. Finden Sie eine Parameterdarstellung der Evolute der Kurve

$$x = 2\cos t + \cos 2t, \quad y = 2\sin t + \sin 2t.$$

4. Das *Kartesische Blatt* ist die Kurve C gegeben durch die Parameterdarstellung

$$x = \frac{t}{t^3+1}\,, \qquad y = \frac{t^2}{t^3+1},$$

wobei $-\infty < t < -1$ und $-1 < t < +\infty$.

a) Bestimmen Sie die Gleichung, d.h. eine implizite Darstellung, von C.

b) Bestimmen Sie die Schnittpunkte von C mit der ersten Winkelhalbierenden $y = x$ sowie die Tangenten in diesen Schnittpunkten.

c) In welchen Punkten sind die Tangenten parallel zu den Koordinatenachsen ?

5. Eine Kanonenkugel wird vom Punkt $(0, 0)$ aus mit Geschwindigkeit v unter einem Winkel $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ gegenüber der positiven x-Achse abgeschossen. Behandelt man die Kugel als Punktmasse und orientiert die Schwerkraft in Richtung der negativen y-Achse, ist die Bewegung beschrieben durch:

$$\begin{aligned} x(t) &= v\cos(\varphi)t \\ y(t) &= v\sin(\varphi)t - 5t^2. \end{aligned}$$

a) Wie muss der Winkel φ bei vorgegebenem v gewählt werden, damit die Kugel möglichst weit fliegt, bevor sie auf dem Boden (der x-Achse) auftrifft? Argumentieren Sie, warum es sich bei dem von Ihnen gefundenen Wert tatsächlich um ein Maximum handelt!

b) Wo landet die Kugel bei diesem Abschusswinkel, wenn $v = 100$ ist?

[1] Falls Sie r_0 bei a) nicht berechnet haben, können Sie $r_0 = 1$ annehmen.