1. **Offene Aufgabe.** Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$x\,(e^y - 3x)\,y' - 6xy + e^y + 1 = 0.$$

Es genügt, die Lösung implizit anzugeben.

Lösung. Schreiben wir $p(x,y) = -6xy + e^y + 1$ und $q(x,y) = x\,(e^y - 3x)$, so gilt

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}.$$

Da der Definitionsbereich weiters einfach zusammenhängend ist, ist die Differentialgleichung exakt und folglich existiert eine Potentialfunktion F des Vektorfelds (p,q). Durch Integration können wir eine solche Potentialfunktion als $F(x,y) = -3x^2y + xe^y + x$ bestimmen, womit die implizite Lösung der Differentialgleichung durch $F(x,y) = C$, also

$$x(e^y - 3xy + 1) = C$$

für $C \in \mathbb{C}$ gegeben ist. □

2. **Offene Aufgabe.**

(a) Bestimmen Sie die Nullstellen und die Vielfachheiten der Nullstellen des charakteristischen Polynoms der Differentialgleichung

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0.$$

[Hinweis: $1 - 6 + 11 - 6 = 0$.*]*

(b) Es seien $2 \pm 3i$ und -1 die Nullstellen des charakteristischen Polynoms einer homogenen Differentialgleichung dritter Ordnung mit konstanten reellen Koeffizienten. Was ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung?

(c) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung

$$y''' - 7y' + 6y = e^{-x}.$$

Lösung. (a) Das charakteristische Polynom ist gegeben durch $X^3 - 6X^2 + 11X - 6 = 0$. Es kann als

$$(X-1)(X-2)(X-3) = 0$$

faktorisiert werden. Damit sind die Nullstellen gleich 1, 2 und 3 und haben jeweils Vielfachheit 1.

(b) Besitzt eine homogene Differentialgleichung dritter Ordnung mit konstanten Koeffizienten drei verschiedene Nullstellen λ_1, λ_2 und λ_3, so ist die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung durch

$$y(x) = A_1 e^{\lambda_1 x} + A_2 e^{\lambda_2 x} + A_3 e^{\lambda_3 x}$$

gegeben. Folglich ist die Lösung gleich

$$A_1 e^{(2+3i)x} + A_2 e^{(2-3i)x} + A_3 e^{-x} = (B_1 \cos(3x) + B_2 \sin(3x))\, e^{2x} + B_3 e^{-x}$$

für B_1, B_2, $B_3 \in \mathbb{C}$.

(c) Wie man leicht erkennen kann, ist

$$y(x) = \frac{e^{-x}}{12}$$

eine partikuläre Lösung dieser Differentialgleichung. $\square$

3. **Offene Aufgabe.**

(a) Bestimmen Sie die Krümmung der Kurve

$$\vec{r}(t) = \left(t, e^{-t^2}\right)$$

an der Stelle $t = 1$.

(b) Bestimmen Sie einen Ausdruck für die Evolute der Kurve

$$y = x^4.$$

(c) Die Kurve K ist durch

$$t \mapsto ((x(t), y(t)) = \left(\int_0^t \frac{\cos u}{1+u^2}\, du, \int_0^t \frac{\sin u}{1+u^2}\, du\right), \quad 0 \leq t \leq 1$$

gegeben. Berechnen Sie die Bogenlänge von K.

Lösung. (a) Die Formel für die Krümmung ist

$$\frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}.$$

Verwenden wir dies für $x(t) = t$, $y(t) = \exp(-t^2)$ an der Stelle $t = 1$, so folgt, dass die Krümmung der Kurve gleich

$$\left.\frac{(4t^2-2)e^{-t^2}}{\left(1+4t^2e^{-t^2}\right)^{3/2}}\right|_{t=1} = \frac{2e^{-1}}{(1+4e^{-2})^{3/2}}$$

ist.

(b) Wir parametrisieren die Kurve als $(x(t), y(t) = (t, t^4)$. Die Krümmung ist demnach

$$\frac{12t^2}{(1+16t^6)^{3/2}}.$$

Der Normaleneinheitsvektor ist allgemein durch

$$\vec{m}(t) = \frac{(-\dot{y}(t), \dot{x}(t))}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}$$

gegeben, sodass in unserem Fall

$$\vec{m}(t) = \frac{(-4t^3, 1)}{\sqrt{1+16t^2}}$$

gilt. Folglich ist die Evolute gleich

$$(t, t^4) + \frac{1+16t^6}{12t^2}(-4t^3, 1).$$

(c) Die Bogenlänge zwischen $t = 0$ und $t = 1$ genügt der Formel

$$\int_0^1 \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}dt = \int_0^1 \sqrt{\frac{\cos^2 t}{(1+t^2)^2} + \frac{\sin^2 t}{(1+t^2)^2}}dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt$$
$$= \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}.$$

□

4. **Offene Aufgabe.** Es bezeichne I das Intervall $(0, \frac{\pi}{2})$. Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \times I \to \mathbb{R}$ werde durch

$$f(x, y) = x \tan(y)$$

für $x \in \mathbb{R}$ und $y \in I$ definiert.

(a) Bestimmen Sie im Punkt $\left(2, \frac{\pi}{4}, 2\right)$ die Tangentialebene an den Graphen $\Gamma(f)$ von f.

(b) Zeigen Sie, unter der Annahme, dass das totale Differential df eine Abschätzung für den absoluten Fehler Δf ist, dass

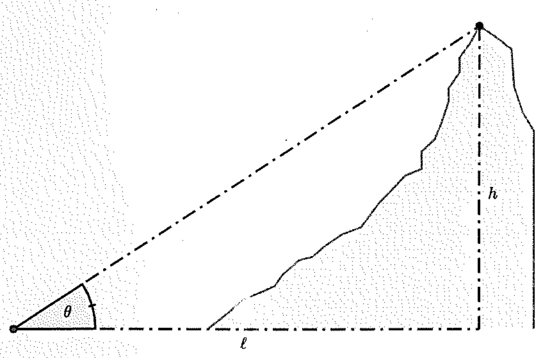
$$\frac{\Delta x}{x} + \frac{2\Delta y}{\sin(2y)}$$

eine Abschätzung für den relativen Fehler $\Delta f / f$ ist.

(c) Eine Methode um den Höhenunterschied zwischen dem aktuellen Standort und einer Bergspitze zu messen ist, den Winkel θ zur Bergspitze und die Entfernung l zum (gedachten) Fußpunkt des Berges zu messen (siehe Abbildung unten).

Dann berechnet sich der Höhenunterschied h als $h = f(l, \theta)$. Wir nehmen an, dass wir θ mit einer Genauigkeit von $1°$ und l mit einer Genauigkeit von 1% messen können. Verwenden Sie (b), um eine obere Schranke M für den relativen Fehler $\Delta h / h$ zu finden. Zeigen Sie weiter, dass gilt:

$$M \geq \frac{1}{100} + \frac{\pi}{90}.$$



Lösung. (a) Im Punkt $\left(2, \frac{\pi}{4}, 2\right)$ gilt

$$\operatorname{grad}(f(x,y) - z) = \begin{pmatrix} \tan y \\ \frac{x}{\cos^2 y} \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix},$$

womit die Tangentialebene durch

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ \pi/4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

gegeben ist, also

$$x + 4y - z = \pi.$$

(b) Das totale Differential df ist gleich

$$\tan y \, dx + \frac{x}{\cos^2 y} \, dy.$$

Unter der Annahme, dass das totale Differential df eine Abschätzung für den absoluten Fehler Δf ist, folgt nun

$$\frac{\Delta f}{f} \approx \frac{df}{f} = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{\sin y \cos y} = \frac{dx}{x} + \frac{2dy}{\sin(2y)} \approx \frac{\Delta x}{x} + \frac{2\Delta y}{\sin(2y)}.$$

(c) Da wir l mit einer Genauigkeit von 1% messen können, ist $\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{100}$; ebenso ist $\Delta\theta = \frac{\pi}{180}$. Mithilfe von (b) finden wir also

$$M = \frac{1}{100} + \frac{\pi}{90 \sin(2\theta)}.$$

Da $0 \leq \sin(2\theta) \leq 1$ für $0 < \theta < \pi/2$ gilt, ist

$$M \geq \frac{1}{100} + \frac{\pi}{90}.$$

□

5. **Offene Aufgabe.** Es bezeichne S die Oberfläche gegeben durch

$$z = x^2 + y^2, \quad 0 \leq z \leq 1.$$

Weiter sei $\vec{v}(x, y, z) = (-y^3, x^3, z^3)$ ein Vektorfeld. Berechnen Sie

$$\int_S \operatorname{rot}(\vec{v}) \cdot d\vec{S}$$

in negativer z-Richtung.

Lösung. Wir parametrisieren die Oberfläche durch $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ und $z = r^2$ für $0 \leq r \leq 1$ und $0 \leq \varphi < 2\pi$. Es gilt

$$\operatorname{rot}(\vec{v}) = \big(0, 0, 3(x^2 + y^2)\big) = (0, 0, 3r^2).$$

Weiters ist

$$d\vec{S} = -(1, 0, 2x) \times (0, 1, 2y)\, dx\, dy = (2x, 2y, -1) \text{ dxdy}$$

in negativer z-Richtung. Insgesamt gilt also

$$\int_S \operatorname{rot}(\vec{v}) \cdot d\vec{S} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} -3r^3 \, d\varphi \, dr = -\frac{3\pi}{2}. \qquad \square$$

6. **Offene Aufgabe.** Es bezeichne

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 3\} \cup \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1\}$$

die Oberfläche eines halboffenen Zylinders. Weiter sei $\vec{v}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld gegeben durch $\vec{v}(x, y, z) = (\cos y, \sin^2 x, z^2 - 6)$.

(a) Die Fläche S kann mit der Kreisscheibe aus der SC-Frage geschlossen werden. Berechnen Sie das Volumen des dadurch entstehenden Zylinders.

(b) Berechnen Sie $\operatorname{div} \vec{v}$.

(c) Berechnen Sie den Fluss

$$\Phi = \iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

aus S heraus.

Lösung. (a) Das Volumen eines Zylinders berechnet sich als Grundfläche mal Höhe, ist also gleich 3π.

(b) Es gilt

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 + 0 + 2z = 2z.$$

(c) Es bezeichne V das Innere des Zylinders und T die Kreisscheibe aus der SC-Frage, gegeben durch $x^2 + y^2 \leq 1, z = 3$. Nach dem Satz von Gauß ist

$$\Phi = \int_V \operatorname{div}(\vec{v})\, dV - \int_T \vec{v} \cdot d\vec{S},$$

wobei das Oberflächenelement $d\vec{S}$ in positiver z-Richtung orientiert ist. Da T Teil einer Ebene parallel zur xy-Ebene ist, ist $d\vec{S} = (0, 0, 1)$. Somit ist

$$\Phi = \iiint_V 2z\, dV - \int_T 3\, dS = 2 \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^3 r z\, dz\, d\varphi\, dr - 3\pi = 6\pi. \quad \square$$

7. **Offene Aufgabe.** Die Funktion $f\colon [0,\pi] \to (0,\infty)$ sei gegeben. Betrachten Sie die Region $R_f \subseteq \mathbb{R}^3$, definiert durch die Menge aller Punkte (x, y, z), die folgende Bedingung erfüllen:

$$0 \leq x^2 + y^2 \leq f(z)\sin(z) \quad \text{für } 0 \leq z \leq \pi.$$

(a) Es sei f_1 definiert durch $f_1\colon z \mapsto \cosh(\cos(z))$. Bestimmen Sie das Volumen von R_{f_1}.

(b) Es sei f_2 definiert durch $f_2\colon z \mapsto e^z$. Wir nehmen an, dass R_{f_2} mit homogenem Material der Dichte 1 gefüllt ist. Bestimmen Sie das Trägheitsmoment von R_{f_2} bezüglich der z-Achse, welches durch

$$\iiint_{R_{f_2}} (x^2 + y^2)\, dV$$

gegeben ist.

Lösung. (a) Wir schreiben in Zylinderkoordinaten um. Allgemein ist das Volumsintegral dann gegeben durch

$$\int_{R_f} dV = \iiint_{R_f} r\,dr\,d\theta\,dz = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{f(z)\sin z}} r\ dr\,d\theta\,dz$$
$$= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{\sqrt{f(z)\sin z}} d\theta\,dz = \pi \int_0^\pi f(z)\sin z\,dz.$$

Für $f(z) = f_1(z)$ finden wir

$$\int_{R_{f_1}} dV = \pi \int_0^\pi \cosh(\cos z)\sin z\,dz = -\pi\left[\sinh(\cos z)\right]_0^\pi$$
$$= \pi(\sinh(1) - \sinh(-1)) = 2\pi\sinh(1).$$

(b) Wieder schreiben wir in Zylinderkoordinaten um. Wie vorhin gilt

$$\int_{R_{f_2}} r^2\,dV = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{e^z \sin z}} r^3\ dr\,d\theta\,dz$$
$$= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{\sqrt{e^z\sin z}} d\theta\,dz = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi e^{2z}\sin^2 z\,dz.$$

Es gilt $\sin^2 z = \frac{1}{2}(1 - \cos(2z))$ und somit, durch die Substitution $u = 2z$,

$$\int_0^\pi e^{2z}\sin^2 z\,dz = \frac{1}{2}\int_0^\pi e^{2z}\left(1 - \cos(2z)\right)dz = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} e^u(1 - \cos u)\,du$$
$$= \frac{1}{4}\left[e^u\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} e^u \cos u\,du = \frac{e^{2\pi} - 1}{4} - \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} e^u\cos u\,du.$$

Nun gilt

$$\int e^u \cos u\,du = e^u\cos u + \int e^u \sin u\,du = e^u\cos u + e^u \sin u - \int e^u\cos u\,du,$$

woraus $\int e^u \cos u \, du = \frac{1}{2}(\cos u + \sin u)e^u + C$ folgt. Somit ist

$$\int_0^\pi e^{2z} \sin^2 z \, dz = \frac{e^{2\pi} - 1}{4} - \frac{1}{4}\left[\frac{(\cos u + \sin u)e^u}{2}\right]_0^{2\pi} = \frac{e^{2\pi} - 1}{8},$$

womit die endgültige Lösung

$$\int_{R_{f_2}} r^2 \, dV = \frac{\pi\left(e^{2\pi} - 1\right)}{16}$$

ist. $\square$

Lösungen SC/MC Analysis I/II D-MAVT/MATL

Dr. Andreas Steiger

Sommer 2017

1c, 2c, 3b, 4b, 5a, 6a,
7c, 8b, 9c, 10a, 11c, 12c,
13a, 14a, 15b, 16c, 17c, 18c,

19: f, f, f
20: f, f, w
21: w, f, w
22: w, f, f
23: w, f, w
24: w, f, f
25: w, w, f
26: w, f, w
27: f, w, w