Lösung - Schnellübung 2

1. Bestimmen Sie die Konstanten $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\beta \in \mathbb{R}$ derart, dass die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} x^2 - \alpha x + \beta, & x \leq -1; \\ (\alpha + \beta)x, & -1 < x < 1; \\ x^2 + \alpha x - \beta, & x \geq 1 \end{cases}$$

auf der ganzen reellen Achse stetig wird, und zeichnen Sie den resultierenden Graphen von f.

Lösung: Es ist klar, dass f an allen Stellen $x \notin \{-1, +1\}$ stetig ist. Damit f auch für $x = \pm 1$ stetig wird, müssen wir

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^+} f(x) = f(-1) \quad \text{und} \quad \lim_{x \to +1^-} f(x) = \lim_{x \to +1^+} f(x) = f(+1) \tag{1}$$

verlangen. Im einzelnen erhalten wir

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -1^-} f(x) &= \lim_{x \to -1^-} \left(x^2 - \alpha x + \beta\right) = 1 + \alpha + \beta, \\ \lim_{x \to -1^+} f(x) &= \lim_{x \to -1^+} (\alpha + \beta)\, x = -\alpha - \beta, \\ \lim_{x \to +1^-} f(x) &= \lim_{x \to +1^-} (\alpha + \beta)\, x = \alpha + \beta, \\ \lim_{x \to +1^+} f(x) &= \lim_{x \to +1^+} \left(x^2 + \alpha x - \beta\right) = 1 + \alpha - \beta. \end{aligned}$$

Dies ergibt das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 1 + \alpha + \beta &= -\alpha - \beta, \\ \alpha + \beta &= 1 + \alpha - \beta, \end{aligned}$$

dessen einzige Lösung

$$\alpha = -1 \quad , \quad \beta = \frac{1}{2}$$

ist. Einsetzen in (1) liefert dann

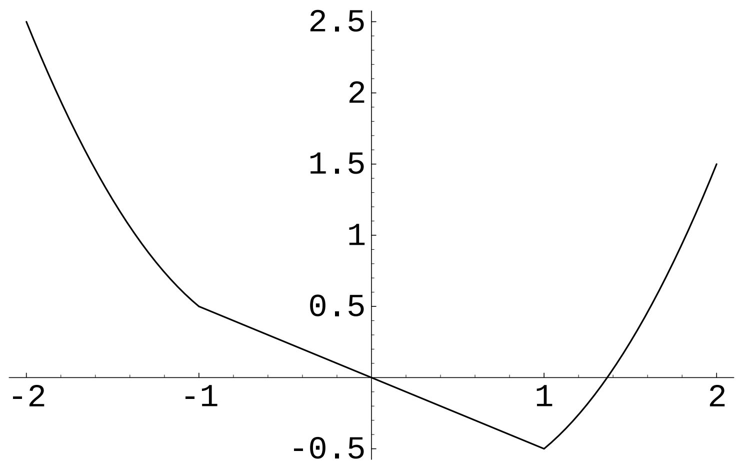
$$f(-1) = \frac{1}{2} \quad , \quad f(1) = -\frac{1}{2}.$$

Die gesuchte Funktion lautet damit

$$f(x) := \begin{cases} x^2 + x + \frac{1}{2} & (x \leq -1) \\ -\frac{1}{2}x & (-1 < x \leq 1) \\ x^2 - x - \frac{1}{2} & (x > 1)\,. \end{cases}$$

Bitte wenden!

Es ergibt sich der folgende Graph:



2. Zeige, dass die Gleichung

$$\frac{2}{(x+1)^4} + \frac{3}{(x-1)^9} = 0$$

eine Lösung $x \in (-1, 1)$ besitzt.

Lösung: Wir bemerken zunächst, dass die ganzrationale Funktion

$$f(x) = \frac{2}{(x+1)^4} + \frac{3}{(x-1)^9} = \frac{2}{(x+1)^4} - \frac{3}{(1-x)^9}$$

im Intervall $(-1, 1)$ stetig ist. Gesucht ist eine Nullstelle dieser Funktion. Wir stellen fest, dass

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x \to +1^-} f(x) = -\infty.$$

Somit gibt es $a \in (-1, 0)$ mit $f(a) > 0$ und $b \in (0, 1)$ mit $f(b) < 0$. Nach dem Zwischenwertsatz existiert also ein $x \in (a, b) \subset (-1, 1)$ mit $f(x) = 0$.

3. Es sei $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $x \mapsto x^3 - x$. Bestimme ein Intervall $I := [a, b)$ so dass $p\colon \mathbb{R} \setminus I \to \mathbb{R}$ bijektiv ist. *Tipp*: Bestimme die Nullstellen von p und skizziere den Graphen von p.

Lösung: Es gilt $p(x) = x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x-1)(x+1)$ und somit hat p die Nullstellen $-1, 0, 1$. Wir definieren $I = [-1, 1)$. Im folgenden zeigen wir, dass $p\colon \mathbb{R} \setminus I \to \mathbb{R}$ bijektiv ist.

Zuerst zeigen wir die Surjektivität.

Es gilt $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 - x = +\infty$, weil $x \leq \frac{1}{2}x^3$ für alle $\sqrt{2} \leq x$. Somit

$$\lim_{x \to -\infty} x^3 - x = \lim_{x \to +\infty} (-x)^3 + x = \lim_{x \to +\infty} -x^3 + x = -\left(\lim_{x \to +\infty} x^3 - x\right) = -\infty.$$

Weil $p(-1) = 0$ und $\lim\limits_{x \to -\infty} p(x) = -\infty$ folgt $p((-\infty, -1)) = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\} = \mathbb{R}_{<0}$ aus dem Zwischenwertsatz.

Siehe nächstes Blatt!

Weil $p(1) = 0$ und $\lim_{x\to+\infty} p(x) = +\infty$ folgt $p([1,+\infty)) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} = \mathbb{R}_{\geq 0}$ aus dem Zwischenwertsatz. Wir haben also gezeigt, dass $p\colon \mathbb{R} \setminus I \to \mathbb{R}$ surjektiv ist.

Nun zeigen wir die Injektivität. Nehme an das es $x, y \in \mathbb{R} \setminus I$ gibt, so dass $x \neq y$ und $p(x) = p(y)$. Um zu zeigen, dass $p\colon \mathbb{R} \setminus I \to \mathbb{R}$ injektiv ist, müssen wir zeigen, dass es solche x, y nicht geben kann.

Zuerst bemerken wir, dass

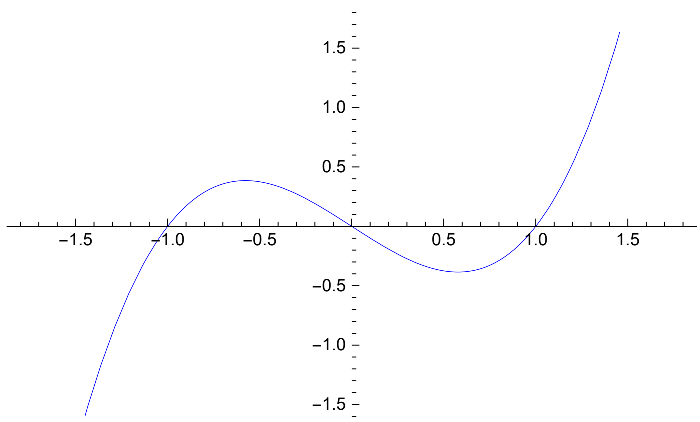
$$\begin{aligned} y^3 - y = x^3 - x &\iff \\ y^3 - x^3 = y - x &\iff \\ (y-x)(y^2 + xy + x^2) = y - x &\iff \\ y^2 + xy + x^2 = 1. \end{aligned}$$

Desweiteren haben x, y dasselbe Vorzeichen, weil $p(x) = p(y)$ und $p(t) \leq 0$ falls $t \leq -1$ und $p(t) \geq 0$ falls $t \geq 1$ (siehe auch die Skizze). Somit $xy > 0$ und weil $|x|, |y| \geq 1$ erhalten wir

$$2 = 1^2 + 1^2 < x^2 + xy + y^2 = 1,$$

also $2 < 1$ was falsch ist, und somit gibt es keine $x, y \in \mathbb{R} \setminus I$, so dass $x \neq y$ und $p(x) = p(y)$. Die Funktion $p\colon \mathbb{R} \setminus I \to \mathbb{R}$ ist also injektiv.

Skizze:



4. Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$x \mapsto \sin(3x) + 4\sin(x)^3 - 3\sin(x).$$

a) Zeige, dass $f''(x) + 9f(x) = 0$.
(*Bemerkung*: Dies ist die Differentialgleichung des harmonischen Oszillators, welche später in der Vorlesung noch behandelt werden wird.)

b) Benutze die Additionsformeln für $\sin$ und $\cos$ um zu zeigen, dass $f(x) = 0$.

c) Zeige, dass die Gleichheit $-\cos(3x) + 4\cos(x)^3 - 3\cos(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. *Tipp:* $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$.

Bitte wenden!

Lösung:

a) Wir berechnen

$$f'(x) = 3\cos(3x) + 12\sin(x)^2\cos(x) - 3\cos(x)$$
$$f''(x) = -9\sin(3x) - 12\sin(x)^3 + 24\sin(x)\cos(x)^2 + 3\sin(x).$$

Mit $\cos(x)^2 = 1 - \sin(x)^2$ erhalten wir

$$\begin{aligned} f''(x) &= -9\sin(3x) - 12\sin(x)^3 + 24\sin(x)\cos(x)^2 + 3\sin(x) \\ &= -9\sin(3x) - 12\sin(x)^3 + 24\sin(x)\left(1 - \sin(x)^2\right) + 3\sin(x) \\ &= -9\sin(3x) - 12\sin(x)^3 - 24\sin(x)^3 + 24\sin(x) + 3\sin(x) \\ &= 9\left(-\sin(3x) - 4\sin(x)^3 + 3\sin(x)\right) = -9f(x) \end{aligned}$$

und somit $f''(x) + 9f(x) = 0$.

b) Additionstheoreme:

$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x), \\ \cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y). \end{aligned}$$

Deshalb

$$\begin{aligned} \sin(3x) &= \sin(2x+x) = \sin(2x)\cos(x) + \sin(x)\cos(2x), \\ \cos(2x) &= \cos(x+x) = \cos(x)^2 - \sin(x)^2, \\ \sin(2x) &= \sin(x+x) = 2\sin(x)\cos(x). \end{aligned}$$

Mit diesen Identitäten erhalten wir

$$\begin{aligned} \sin(3x) &= \sin(2x+x) = \sin(2x)\cos(x) + \sin(x)\cos(2x) \\ &= \sin(2x+x) = (2\sin(x)\cos(x))\cos(x) + \sin(x)\left(\cos(x)^2 - \sin(x)^2\right) \\ &= 2\sin(x)\cos(x)^2 + \sin(x)\cos(x)^2 - \sin(x)^3 \\ &= 3\sin(x)\cos(x)^2 - \sin(x)^3 \\ &= 3\sin(x)\left(1 - \sin(x)^2\right) - \sin(x)^3 \\ &= 3\sin(x) - 4\sin(x)^3. \end{aligned}$$

und deshalb folgt $f(x) = 0$.

c) Wir benutzen den Tipp um $f(x + \frac{\pi}{2})$ zu berechnen,

$$\begin{aligned} f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= \sin\left(3x + 3\frac{\pi}{2}\right) + 4\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)^3 - 3\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \sin\left((3x+\pi) + \frac{\pi}{2}\right) + 4\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)^3 - 3\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \cos(3x+\pi) + 4\cos(x)^3 - 3\cos(x) \\ &= -\cos(3x) + 4\cos(x)^3 - 3\cos(x). \end{aligned}$$

Wegen Teilaufgabe **b)** wissen wir, dass $f(x + \frac{\pi}{2}) = 0$ und somit folgt

$$-\cos(3x) + 4\cos(x)^3 - 3\cos(x) = 0$$

wie gewünscht.