Dr. Andreas Steiger

Lösung - Schnellübung 3

1. Es sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$x \mapsto \sinh(2x) - 2\sinh(x)\cosh(x).$$

a) Zeige $f''(x) - 4f(x) = 0$.

b) Zeige $f(x) + \frac{1}{2}f'(x) = 0$. Wieso folgt daraus, dass $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$?

c) Zeige $\cosh(2x) = \cosh(x)^2 + \sinh(x)^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Lösung:

a) Wir berechnen

$$\begin{aligned} f(x) &= \sinh(2x) - 2\sinh(x)\cosh(x) \\ f'(x) &= 2\cosh(2x) - 2(\sinh(x)^2 + \cosh(x)^2) \\ f''(x) &= 4\sinh(2x) - 4(\sinh(x)\cosh(x) + \cosh(x)\sinh(x)). \end{aligned}$$

Deshalb gilt, $f''(x) - 4f(x) = 0$, wie gewünscht.

b) Mit den in Teilaufgabe a) berechneten Ableitungen sieht man, dass

$$\begin{aligned} &f(x) + \frac{1}{2}f'(x) \\ &= (\sinh(2x) - 2\sinh(x)\cosh(x)) + \big(\cosh(2x) - (\sinh(x)^2 + \cosh(x)^2)\big) \\ &= \sinh(2x) + \cosh(2x) - (\sinh(x)^2 + 2\sinh(x)\cosh(x) + \cosh(x)^2) \\ &= e^{2x} - (\sinh(x) + \cosh(x))^2 = e^{2x} - e^{2x} = 0. \end{aligned}$$

Wir haben also gezeigt, dass $f'(x) = -2f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Weil ebenfalls gilt, $(e^{-2x})' = -2e^{-2x}$, folgt, dass

$$f(x) = Ce^{-2x},$$

wobei $C \in \mathbb{R}$. (Hier haben wir den Satz auf Seite 35, Kapitel II, Teil A vom STAMMBACH verwendet). Beachte, dass $f(0) = 0$ und deshalb $0 = f(0) = Ce^0 = C$, also $C = 0$ und somit $f = 0$, was zu zeigen war.

c) Nach Teilaufgabe b) gilt $f'(x) = -2f(x)$, also insbesondere $f'(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. In Teilaufgabe a) haben wir gesehen, dass

$$f'(x) = 2\cosh(2x) - 2(\sinh(x)^2 + \cosh(x)^2),$$

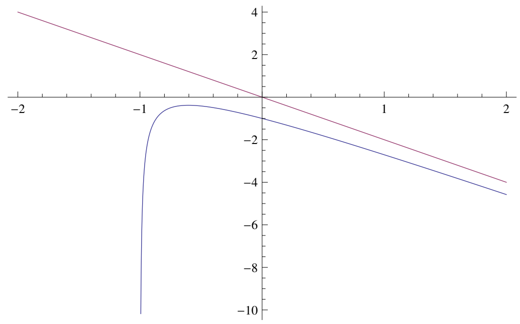
also folgt $\cosh(2x) = \cosh(x)^2 + \sinh(x)^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$ wie gewünscht.

2. Welches ist eine Asymptote der Funktion $f(x) := -2x - \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ für $x \to +\infty$? Auswahlmöglichkeiten: $y(x) = 0,\ \ y(x) = -1,\ \ y(x) = -2x$ oder $y(x) = -2x - 1$.

Lösung:

Für $x \to +\infty$ geht $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ gegen 0. Somit ist eine Asymptote gegeben durch $y = -2x$.

Bitte wenden!



3. Berechnen Sie, mit Hilfe der *Bernoulli-Hôpital*-Regel folgende Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2-4x}-1}{2x^2-8x}$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\arctan(x)-\frac{\pi}{4}}{\tan(\pi x/4)-1}$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2-5}{x\log^2(x)}$

Lösung:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2-4x}-1}{2x^2-8x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(2x-4)e^{x^2-4x}}{4x-8} = \dfrac{1}{2}.$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\arctan(x)-\frac{\pi}{4}}{\tan(\pi x/4)-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\frac{1}{x^2+1}}{(\pi/4)\sec^2(\pi x/4)} = \dfrac{1}{\pi}.$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2-5}{x\log^2(x)} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x}{\log^2(x)+2\log(x)} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2}{\frac{2\log(x)}{x}+\frac{2}{x}} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x}{\log(x)+1}$

$= \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{1/x} = +\infty.$

4. Zeige $e^x \geq x+1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $\ln(x) \leq x-1$ für alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$ mittels Methoden der Extremalwertrechnung.

Lösung: Wir betrachten die Funktion $F(x) := e^x - x - 1$, welche für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert ist und die Funktion und $G(x) := \ln(x) - x + 1$, welche für alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$ definiert ist. Wir berechnen

$$F'(x) = e^x - 1,\ G'(x) = \frac{1}{x} - 1.$$

Die einzige Nullstelle von F' ist gegeben durch $x_F = 0$ und die einzige Nullstelle von G' ist gegen durch $x_G = 1$. Es gilt

$$F''(0) = 1,\ G''(1) = -1.$$

Somit ist x_F ein globales Minimum von F und x_G ein globales Maximum von G. Deshalb,

$$0 = F(0) \leq F(x),\ G(x) \leq G(1) = 0$$

Siehe nächstes Blatt!

für alle zulässigen $x \in \mathbb{R}$. Weil $F(x) \geq 0$, folgt

$$e^x \geq x + 1$$

und analog, weil $G(x) \leq 0$ folgt

$$\ln(x) \leq x - 1,$$

was zu zeigen war.