

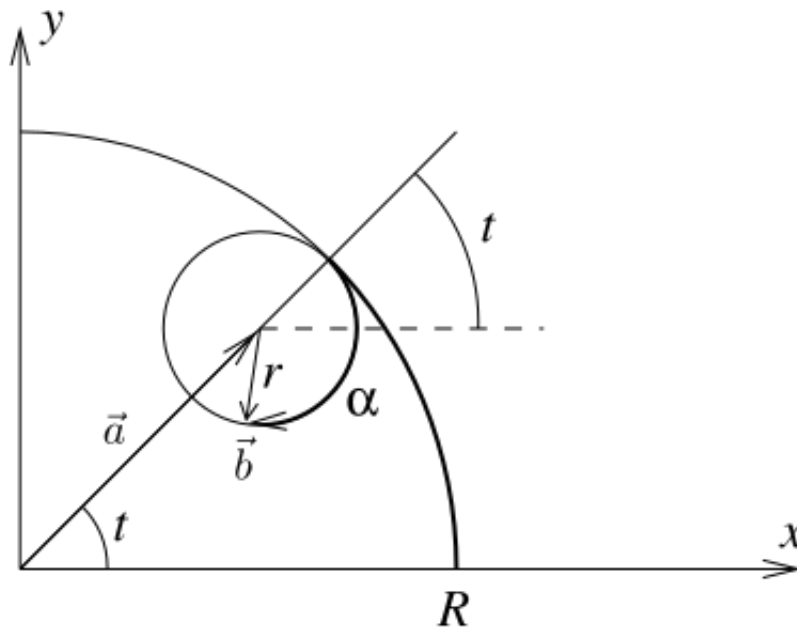
Lösung - Schnellübung 4

1. Ein Kreis vom Radius r rollt im Innern eines Kreises vom Radius R ab. Die Kurve $\vec{r}(t)$, die dabei ein fester Punkt P auf dem Rand des kleinen Kreises beschreibt, heisst *Hypozykloide*.

- Bestimme $\vec{r}(t)$ allgemein (im Fall $r \leq R$).
- Was ergibt sich im Spezialfall $R = 4r$?
- Was ergibt sich im Spezialfall $R = 2r$?

Lösung:

- Die Parametrisierung einer Hypozykloide finden wir folgendermassen: Zunächst finden wir eine Parametrisierung $\vec{a}(t)$ des Mittelpunktes M des kleinen Kreises und überlegen uns danach, welcher Vektor $\vec{b}(t)$ zwischen M und P liegt. Daraus erhalten wir $\vec{r}(t) = \vec{a}(t) + \vec{b}(t)$. Wir legen fest, dass der kleine Kreis im Gegenuhrzeigersinn abrollt und mit $t \in \mathbb{R}$ bezeichnen wir den Winkel (im Bogenmass), welcher M bereits zurückgelegt hat. Für $t = 0$ nehmen wir weiter an, dass P auf der x -Achse liegt.



Es ist klar, dass sich M auf einem Kreis mit Radius $R - r$ im Gegenuhrzeigersinn bewegt. Es gilt also

$$\vec{a}(t) = (R - r) \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

Aus der Geometrie des Problems ist klar, dass der (variable) Berührungspunkt der beiden Kreise beim Winkel t eine Distanz von Rt zurückgelegt hat. Alle Punkte auf dem kleinen Kreis bewegen sich

also relativ zu diesem Berührungspunkt ebenfalls um diese Distanz im Uhrzeigersinn, also gilt für den Winkel $\alpha(t)$ zwischen P und dem (variablen) Berührungspunkt

$$r\alpha(t) = Rt \iff \alpha(t) = \frac{Rt}{r}.$$

Um $\vec{b}(t)$ zu bestimmen, sind wir jedoch nicht an $\alpha(t)$ interessiert, sondern am Winkel zwischen $\vec{b}(t)$ und der Horizontalen. Wie wir aus der Skizze sehen, ist dieser Winkel gleich

$$\alpha(t) - t = \frac{Rt}{r} - t = \frac{Rt - rt}{r} = \frac{R - r}{r} t,$$

es ergibt sich also

$$\vec{b}(t) = r \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{R-r}{r}t\right) \\ -\sin\left(\frac{R-r}{r}t\right) \end{pmatrix}$$

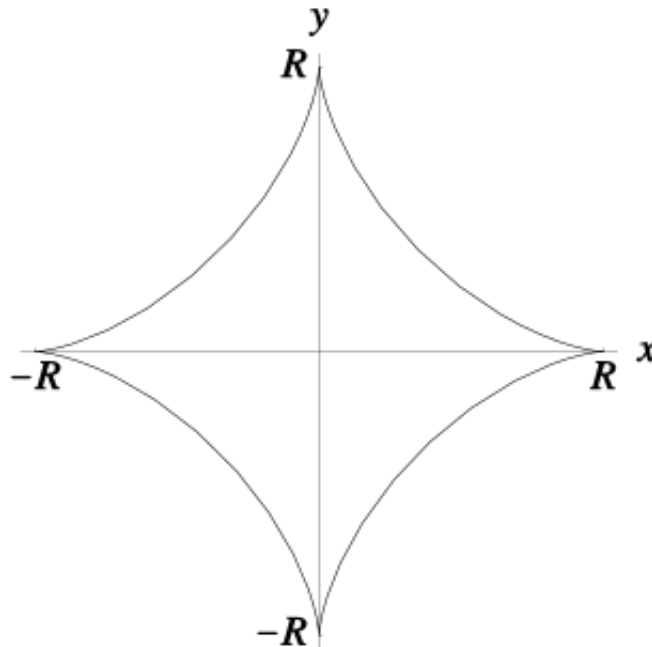
und damit

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \vec{a}(t) + \vec{b}(t) = (R - r) \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{R-r}{r}t\right) \\ -\sin\left(\frac{R-r}{r}t\right) \end{pmatrix}.$$

b) Einsetzen ergibt

$$\vec{\gamma}(t) = \frac{R}{4} \begin{pmatrix} 3 \cos t + \cos 3t \\ 3 \sin t - \sin 3t \end{pmatrix}.$$

Diese Kurve wird auch *Astroide* genannt, die x - und y -Achse sind die asymptotischen Tangenten in den vier Spitzen.



Bemerkung: Für $R = nr$, $n \in \mathbb{N}$ ergibt sich analog

$$\vec{\gamma}(t) = \frac{R}{n} \begin{pmatrix} (n-1) \cos t + \cos(n-1)t \\ (n-1) \sin t - \sin(n-1)t \end{pmatrix}.$$

Diese Kurve hat n Spitzen, welche die Eckpunkte eines regelmäßigen n -Ecks bilden.

Siehe nächstes Blatt!

c) Einsetzen ergibt

$$\vec{\gamma}(t) = \frac{R}{2} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + \frac{R}{2} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \cos t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Somit bewegt sich P nur auf der x -Achse hin und her!

2. Es sei

$$f(x) = nx^n + (n-1)x^{n-1} + \dots + 1,$$

$$g(x) = \ln(e^x - x) \ln(e^x - x^2) \dots \ln(e^x - x^n).$$

Zeige, dass gilt $f(x) = O(g(x))$ mit $x \rightarrow +\infty$ und $g(x) = O(f(x))$ mit $x \rightarrow +\infty$.

Lösung: Beachte

$$\ln(e^x - x^k) = \ln\left(e^x \left(1 - \frac{x^k}{e^x}\right)\right) = \ln(e^x) + \ln\left(1 - \frac{x^k}{e^x}\right).$$

Deshalb gilt

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^x)}{\ln(e^x - x^k)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^x)}{\ln(e^x) + \ln\left(1 - \frac{x^k}{e^x}\right)} = 1.$$

Wir können also folgende Rechnung durchführen

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{nx^n + (n-1)x^{n-1} + \dots + 1}{\ln(e^x - x) \ln(e^x - x^2) \dots \ln(e^x - x^n)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^x)}{\ln(e^x - x)} \dots \frac{\ln(e^x)}{\ln(e^x - x^n)} \frac{nx^n + (n-1)x^{n-1} + \dots + 1}{\ln(e^x)^n}.$$

Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{nx^n + (n-1)x^{n-1} + \dots + 1}{\ln(e^x)^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{nx^n}{x^n} + \dots + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = n$$

und deshalb

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = n,$$

also $f(x) = O(g(x))$ mit $x \rightarrow +\infty$.

Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^x - x) \ln(e^x - x^2) \dots \ln(e^x - x^n)}{nx^n + (n-1)x^{n-1} + \dots + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{nx^n}{nx^n + (n-1)x^{n-1} + \dots + 1} \frac{\ln(e^x - x) \ln(e^x - x^2) \dots \ln(e^x - x^n)}{nx^n}.$$

Weil

$$\frac{\ln(e^x - x) \ln(e^x - x^2) \dots \ln(e^x - x^n)}{nx^n}$$

$$= \left(\ln(e^x) + \ln\left(1 - \frac{x}{e^x}\right)\right) \dots \left(\ln(e^x) + \ln\left(1 - \frac{x^n}{e^x}\right)\right) \frac{1}{nx^n}$$

$$= \left(1 + \frac{\ln\left(1 - \frac{x}{e^x}\right)}{x}\right) \dots \left(1 + \frac{\ln\left(1 - \frac{x^n}{e^x}\right)}{x}\right) \frac{1}{n},$$

Bitte wenden!

folgt

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{f(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{nx^n}{nx^n + (n-1)x^{n-1} + \dots + 1} \left(1 + \frac{\ln\left(1 - \frac{x}{e^x}\right)}{x}\right) \dots \left(1 + \frac{\ln\left(1 - \frac{x^n}{e^x}\right)}{x}\right) \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Wir haben also gezeigt, dass $g(x) = O(f(x))$ mit $x \rightarrow +\infty$.

3. Bestimmen Sie die Krümmungsfunktion $t \mapsto k(t)$ sowie die Evolute $t \mapsto \vec{z}(t)$ der kubischen Parabel $t \mapsto \vec{r}(t) = (t, t^3)$, $t \in \mathbb{R}$.

a) Wo wird die Krümmung minimal oder maximal? (Beachten Sie hierbei das Vorzeichen.)

b) Wie verhält sich $\vec{z}(t)$ in der Nähe von $t = 0$?

Lösung: Wir definieren $x(t) = t$ und $y(t) = t^3$. Die ersten und die zweiten Ableitungen dieser Funktionen sind

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= 1, & \dot{y}(t) &= 3t^2, \\ \ddot{x}(t) &= 0, & \ddot{y}(t) &= 6t. \end{aligned}$$

Aus den Formeln für die Krümmung und Evolute von \vec{r} folgt, dass

$$k(t) = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} = \frac{6t}{(1 + 9t^4)^{3/2}}$$

für $t \in \mathbb{R}$ ist und

$$\begin{aligned} \vec{z}(t) &= \left(x - \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}} \dot{y}, y + \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}} \dot{x} \right) \\ &= \left(t - \frac{1 + 9t^4}{6t} \cdot 3t^2, t^3 + \frac{1 + 9t^4}{6t} \right) \\ &= \left(\frac{t - 9t^5}{2}, \frac{1 + 15t^4}{6t} \right) \end{aligned}$$

für $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Die Evolute ist an der Stelle $t = 0$ also nicht definiert. Dies lässt sich dadurch erklären, dass die Kurve dort einen Wendepunkt besitzt, also Krümmung Null hat.

a) Die erste Ableitung der Krümmung ist

$$k'(t) = \frac{6(1 - 45t^4)}{(1 + 9t^4)^{5/2}}.$$

Darum hat k mögliche Extrema an den Stellen $t = \pm 45^{-1/4}$. Um zu bestimmen, ob es sich dabei um Maxima, Minima oder Wendepunkte handelt, könnten wir die zweite Ableitung der Krümmung berechnen und das bekannte Kriterium verwenden. Hier wollen wir uns dies jedoch ersparen und beschreiten einen anderen Weg. Es gilt nämlich

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} k(t) = 0, \quad k(45^{-1/4}) > 0 \text{ und } k(-45^{-1/4}) < 0,$$

somit liegt an der Stelle $t = -45^{-1/4}$ (bzw. $t = 45^{-1/4}$) ein globales Minimum (bzw. ein globales Maximum) der Krümmung vor.

Siehe nächstes Blatt!

b) Für kleine t ist $\vec{z}(t)$ asymptotisch zu $\vec{s}(t) = (\frac{t}{2}, \frac{1}{6t})$, da die höheren Potenzen von t vernachlässigbar sind.

4. Die *Astroide* ist durch folgende implizite Gleichung gegeben

$$x^{2/3} + y^{2/3} = 1.$$

Finde die Gleichung der Astroide in Polarkoordinaten (d.h. $\varrho = f(\varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$). Für welche Winkel $\varphi \in [0, 2\pi]$ ist der Radius ϱ minimal?

Lösung: Es sei $\varrho = f(\varphi)$. Somit gilt

$$x = f(\varphi) \cos(\varphi), \quad y = f(\varphi) \sin(\varphi).$$

Weil

$$x^{2/3} + y^{2/3} = 1,$$

folgt

$$f(\varphi)^{2/3} (\cos(\varphi)^{2/3} + \sin(\varphi)^{2/3}) = 1$$

und deshalb

$$f(\varphi) = \frac{1}{(\cos(\varphi)^{2/3} + \sin(\varphi)^{2/3})^{3/2}}.$$

Wir berechnen

$$f'(\varphi) = -\frac{3 \left(\frac{2 \cos(\varphi)}{3 \sqrt[3]{\sin(\varphi)}} - \frac{2 \sin(\varphi)}{3 \sqrt[3]{\cos(\varphi)}} \right)}{2 \left(\sin^{\frac{2}{3}}(\varphi) + \cos^{\frac{2}{3}}(\varphi) \right)^{5/2}}.$$

Und somit $f'(\varphi) = 0$ genau dann wenn

$$\frac{\cos(\varphi)}{\sin(\varphi)^{1/3}} = \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)^{1/3}},$$

was äquivalent zu

$$\cos(\varphi)^{4/3} = \sin(\varphi)^{4/3} \iff |\cos(\varphi)| = |\sin(\varphi)|$$

ist. Es gilt $|\cos(\varphi)| = |\sin(\varphi)|$ genau dann wenn $\varphi = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, wobei $k \in \mathbb{Z}$ (das überlegt man sich am besten am Einheitskreis). Weiter gilt

$$f''(\varphi) = \frac{15 \left(\frac{2 \cos(\varphi)}{3 \sqrt[3]{\sin(\varphi)}} - \frac{2 \sin(\varphi)}{3 \sqrt[3]{\cos(\varphi)}} \right)^2}{4 \left(\sin^{\frac{2}{3}}(\varphi) + \cos^{\frac{2}{3}}(\varphi) \right)^{7/2}} - \frac{3 \left(-\frac{2}{3} \sin^{\frac{2}{3}}(\varphi) - \frac{2}{3} \cos^{\frac{2}{3}}(\varphi) - \frac{2 \sin^2(\varphi)}{9 \cos^{\frac{4}{3}}(\varphi)} - \frac{2 \cos^2(\varphi)}{9 \sin^{\frac{4}{3}}(\varphi)} \right)}{2 \left(\sin^{\frac{2}{3}}(\varphi) + \cos^{\frac{2}{3}}(\varphi) \right)^{5/2}}.$$

Es sei $\varphi_0 = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ und $d = |\cos(\varphi_0)| = |\sin(\varphi_0)|$. Man erhält

$$f''(\varphi_0) = 0 - \frac{3 \left(-\frac{2}{3} d^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3} d^{\frac{2}{3}} - \frac{2d^2}{9d^{\frac{4}{3}}} - \frac{2d^2}{9d^{\frac{4}{3}}} \right)}{2 \left(d^{\frac{2}{3}} + d^{\frac{2}{3}} \right)^{5/2}} = \frac{3 \cdot \frac{16}{9} \cdot d^{2/3}}{2 \cdot 2^{5/2} d^{5/3}} = \frac{8}{3} \frac{1}{2^{5/2}} \frac{1}{d} = \frac{2}{3} > 0,$$

weil $d = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Somit hat die Funktion $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ an den Punkten $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ lokale Minima. Weil die Funktion f periodisch ist mit Periode $\frac{\pi}{2}$ und die Punkte $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ die einzigen kritischen von f sind, handelt es sich dabei sogar um globale Minima.

(Beachte, dass f genau an den Stellen $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ nicht differenzierbar ist. Weil aber $f(0) = 1 > f(\frac{\pi}{4})$ handelt es sich bei diesen Punkten nicht um globale Minima. Es gilt tatsächlich sogar, dass der Radius an den Stellen $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ maximal wird.)

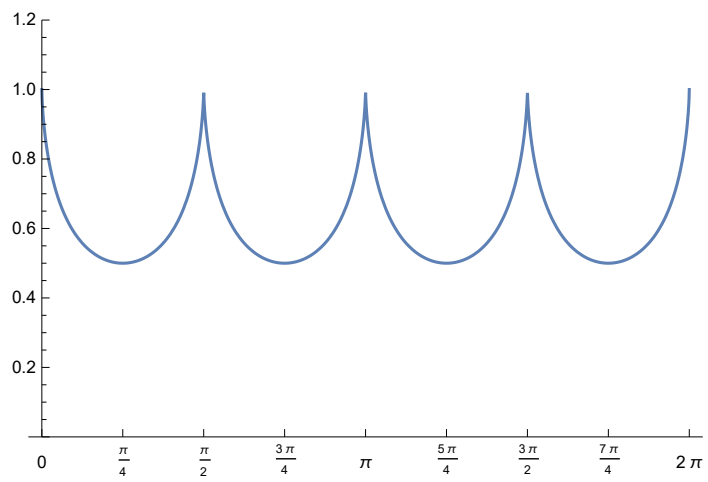


Abbildung 1: Graph von $\varrho = f(\varphi)$