Lösung - Schnellübung 6

1. Berechne das Integral $\displaystyle\int_{-1}^{1} x \arcsin(x)\,\mathrm{d}x$ mithilfe der Substitution $x = \sin u$.

Lösung: Mit $x = \sin u$ erhalten wir $dx = \cos u\,du$ und für die Grenzen $x = \pm 1 \Rightarrow u = \pm\frac{\pi}{2}$. Dann gilt

$$\int_{-1}^{1} x \arcsin x\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} u \sin u \cos u\,du = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} u \sin(2u)\,du$$
$$= -\frac{1}{4}\left[u\cos(2u)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(2u)\,du = \frac{\pi}{4}.$$

2. Bestimme die Menge aller Parabeln der Form $y = -ax^2 + b, a > 0, b > 0$, welche mit der x-Achse die Fläche $\frac{4}{3}$ einschliessen.

Lösung: Die Schnittpunkte der Parabel mit der x-Achse sind durch die Nullstellen von $-ax^2 + b$ gegeben, nämlich $x = \pm\sqrt{\frac{b}{a}}$. Die Fläche unter der Parabel ist wegen der Symmetrie gegeben durch

$$F(a,b) = 2\int_{0}^{\sqrt{\frac{b}{a}}} \left(-ax^2 + b\right)\,dx = 2\left[-\frac{a}{3}x^3 + bx\right]_0^{\sqrt{\frac{b}{a}}}$$
$$= 2\left(-\frac{a}{3}\frac{b^{3/2}}{a^{3/2}} + b\frac{b^{1/2}}{a^{1/2}}\right) = \frac{4}{3}\frac{b^{3/2}}{a^{1/2}}$$

Es gilt $F(a,b) = \frac{4}{3}$ genau dann, wenn $a = b^3$. Somit ist die gesuchte Schar gegeben durch

$$f(x) = -b^3x^2 + b,\ b > 0.$$

3. Es sei $h \in [0,1]$ eine reelle Zahl und T das Tetraeder mit Ecken in $(0,0,0), (1,0,0)$, $(0,1,0)$ und $(0,0,1)$.

a) Berechne den Flächeninhalt $S(h)$ des Schnitts von T mit der Ebene $z = h$.

b) Berechne den Volumeninhalt $V(h)$ des Tetraederstumpfes, der durch Abschneiden der Spitze von T durch die Ebene $z = h$ entsteht. Was gilt für $h = 1$?

Lösung:

a) Zwischen $h = 0$ und $h = 1$ nehmen die Seitenlängen des Schnittes parallel zur x- und y-Achse linear ab. Auf Höhe $z = h$ haben diese rechtwinklig aufeinanderstehenden Seiten also Länge $1-h$, nach der Flächenformel für Dreiecke gilt also

$$S(h) = \frac{(1-h)^2}{2}.$$

b) Der Volumeninhalt des Tetraederstumpfes ergibt sich durch Integration in z-Richtung und ist gleich

$$\begin{aligned} V(h) &= \int_0^h S(z)\,dz = \int_0^h \frac{(1-z)^2}{2}\,dz = -\frac{1}{6}\left[(1-z)^3\right]_0^h \\ &= -\frac{1}{6}\big((1-h)^3-1\big) = \frac{1}{6}(1-(1-h)^3) = \frac{h^3-3h^2+3h}{6}. \end{aligned}$$

Im Fall $h=1$ bekommen wir den Volumeninhalt des Tetraeders:

$$V(1) = \frac{1}{6}.$$

4. Es sei $p>0$ eine reelle Zahl. Berechne den Schwerpunkt des Flächenstücks, welches durch die beiden Parablen $y^2=2px$ und $x^2=2py$ begrenzt wird.

Lösung: Allgemeine Formel für den Schwerpunkt $S=(x_S,y_S)$:

$$x_S = \frac{1}{|F|}\iint_F x\,dx\,dy \quad ; \quad y_S = \frac{1}{|F|}\iint_F y\,dy\,dx \quad .$$

Die Schnittpunkte der Parabeln sind gegeben durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{2p} = \sqrt{2px} \quad ,$$

daraus folgt $x(x^3-8p^3)=0$, also $x=0$ oder $x=2p$. Aus Symmetriegründen sind also die Schnittpunkte $(0,0)$ und $(2p,2p)$. Ebenfalls mit Symmetrie sieht man sofort, dass $x_S=y_S$ sein muss.
Die Fläche F kann auf einfache Weise berechnet werden: das Quadrat von $(0,0)$ bis $(2p,2p)$ hat Fläche $(2p)^2$, davon ziehen wir zweimal die Fläche unter der Kurve $y=\frac{x^2}{2p}$ ab. Wir erhalten

$$F = (2p)^2 - 2\cdot\int_0^{2p}\frac{x^2}{2p}dx = 4p^2 - \frac{1}{p}\cdot\frac{1}{3}(2p)^3 = \left(4-\frac{8}{3}\right)p^2 = \frac{4}{3}p^2 \quad .$$

Also gilt

$$y_S\cdot F = \int_0^{2p}\int_{\frac{1}{2p}x^2}^{\sqrt{2px}} y\,dy\,dx = \int_0^{2p}\frac{1}{2}\left(2px-\frac{1}{4p^2}x^4\right)dx = \frac{1}{2}px^2 - \frac{1}{40p^2}x^5\bigg|_0^{2p} = \frac{6}{5}p^3.$$

Somit gilt $y_S = x_S = \dfrac{9}{10}p$.