Lösung - Serie 10

1. **1.** Sei $f(x) := \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t^3+2}}$. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(a) $f(1) < 0$.

(b) $f(-1) > 0$.

√ (c) $f(-\frac{1}{2}) < 0$.

(d) $f(0) > 0$.

Die Funktion $g : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t^3+2}}$ ist überall positiv. Deshalb gilt für alle $a < b$ wobei $g(t)$ auf $[a, b]$ definiert ist, dass das Integral $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ positiv ist. Deshalb ist (a) falsch. Weil $\displaystyle\int_b^a g(t)dt = -\int_a^b g(t)dt$ und $\displaystyle\int_a^b g(t)dt > 0$ falls $a < b$, erhalten wir, dass (b) falsch ist und dass (c) richtig ist. Die Teilaufgabe (d) ist falsch, weil $\displaystyle\int_0^0 g(t)dt = 0$.

2. Berechne die Partialbruchzerlegung von

$$\frac{3x^2-2x+3}{x^3-x^2-x+1}.$$

√ (a) $\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+1}+\frac{2}{(x-1)^2}$.

(b) $\frac{3}{x+1}+\frac{2}{x+1}+\frac{2}{(x-1)^2}$.

(c) $\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+1}+\frac{2}{(x-1)^2}$.

(d) $\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+1}+\frac{2}{(x+1)^2}$

Beachte

$$(x-1)^2(x+1)=x^3-x^2-x+1.$$

Man kann also den Ansatz

$$\frac{3x^2-2x+3}{x^3-x^2-x+1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

machen. Durch Multiplikation mit $(x-1)^2(x+1)$ und Koeffizientenvergleich berechnet man $A=1, B=2, C=2$.

Siehe nächstes Blatt!

3. Welche der folgenden Subtitutionen kann verwendet werden, um das Integral $\displaystyle\int \frac{dx}{2+\cos(x)}$ als $\displaystyle\int \frac{2du}{3+u^2}$ auszudrücken?

(a) $u^2 = 2\cos(x) + 1$.

Es gilt $\cos(x) = \frac{u^2-1}{2}$ und folglich

$$\int \frac{dx}{2+\cos(x)} = \int \frac{dx}{2+\frac{u^2-1}{2}} = \int \frac{2dx}{3+u^2}.$$

Allerdings ist $du/dx = -\sin(x)/\sqrt{2\cos(x)+1} \neq 1$, woraus $\displaystyle\int \frac{dx}{2+\cos(x)} \neq \int \frac{2du}{3+u^2}$ folgt.

(b) $u = 2 + \cos(x)$.

Es gilt $du = -\sin(x)dx$ und folglich ist $dx = -\frac{du}{\sin(x)}$. Somit ist $\displaystyle\int \frac{dx}{2+\cos(x)} = -\int \frac{du}{u\sin(x)}$. Damit dieses Integral gleich $\displaystyle\int \frac{2du}{3+u^2}$ ist, müsste $-u\sin(x) = \frac{3+u^2}{2}$ gelten. Dies ist allerdings nicht der Fall. In der Tat ist $-u\sin(x)$ negativ für $x = \pi/4$, während $\frac{3+u^2}{2}$ immer positiv ist.

√ (c) $u = \tan(x/2)$.

Es sei $u = \tan(x/2)$. Dann gilt $du = \frac{dx}{2\cos^2(x/2)}$ und somit $dx = 2\cos^2(x/2)du$. Als Nächstes drücken wir $\cos^2(x/2)$ durch Terme in u aus:

$$u = \tan(x/2) = \frac{\sin(x/2)}{\cos(x/2)} = \frac{\pm\sqrt{1-\cos^2(x/2)}}{\cos(x/2)}.$$

Schreiben wir diese Gleichung um, so erhalten wir $\cos^2(x/2) = \frac{1}{u^2+1}$. Folglich ist also $dx = \frac{2du}{u^2+1}$ und

$$\int \frac{1}{2+\cos(x)}dx = \int \frac{1}{2+\cos(x)}\left(\frac{2}{u^2+1}\right)du.$$

Nun müssen wir $\cos(x)$ durch Terme in u ausdrücken. Unter der Verwendung der Doppelwinkelformel für den Kosinus folgt $\cos(x) = 2\cos^2(x/2) - 1 = \frac{2}{u^2+1} - 1 = \frac{1-u^2}{u^2+1}$. Damit gilt also, wie gewünscht,

$$\int \frac{1}{2+\cos(x)}\left(\frac{2}{u^2+1}\right)du = \int \frac{1}{2+\frac{1-u^2}{1+u^2}}\left(\frac{2}{u^2+1}\right)du = \int \frac{2du}{3+u^2}.$$

(d) $u = 4\tan(x)$.

In diesem Fall ist $du = \frac{4dx}{\cos^2(x)}$ und folglich $dx = \frac{\cos^2(x)du}{4}$. Wie in der Lösung zu (c) gilt

$$u = 4\tan(x) = \frac{4\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\pm4\sqrt{1-\cos^2(x)}}{\cos(x)}$$

und somit $\cos^2(x) = \frac{16}{u^2+16}$. Daraus folgt, dass $dx = \frac{4du}{u^2+16}$ und $\cos(x) = \frac{4}{\sqrt{u^2+16}}$ gelten. Folglich ist

$$\int \frac{1}{2+\cos(x)}dx = \int \frac{1}{2+\frac{4}{\sqrt{u^2+16}}}\left(\frac{4}{u^2+16}\right)du = \int \frac{2du}{u^2+16+2\sqrt{u^2+16}}.$$

Allerdings gilt $\frac{2}{u^2+16+2\sqrt{u^2+16}} < \frac{2}{u^2+3}$ für alle u.

Bitte wenden!

4. Es sei $u = \sin(x)$. Durch Substitution folgt

$$\int_0^\pi x\sin(x)dx = \int_{u(0)}^{u(\pi)} \frac{xu}{du/dx} du = \int_0^0 \frac{xu}{du/dx} du = 0,$$

da $\displaystyle\int_a^a g(t)dt = 0$ für alle Funktionen g auf $\mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$ gilt. Allerdings folgt durch Verwendung der partiellen Integration, dass $\displaystyle\int_0^\pi x\sin(x)dx = [\sin(x) - x\cos(x)]_0^\pi = \pi \neq 0$ gilt. Welcher der folgenden Sätze beschreibt, worin der Fehler unserer Überlegungen liegt?

(a) Die Funktion $\sin(x) - x\cos(x)$ ist keine Stammfunktion von $x\sin(x)$.

(b) Die Grenzen der Integration sind falsch.

(c) $\int_a^a g(t)dt = 0$ stimmt nicht für alle Funktionen g.

√ (d) Wir können die Substitution $u = \sin(x)$ nicht verwenden, da die Funktion $x \mapsto \sin(x)$ auf dem Intervall $[0, \pi]$ nicht injektiv ist.

Der Beweis, der mithilfe der Substitution $u = \sin(x)$ zeigt, dass $\displaystyle\int_0^\pi x\sin(x)dx = 0$ gilt, ist falsch, während der andere Beweis, der mithilfe partieller Integration zeigt, dass das Integral gleich π ist, korrekt ist.

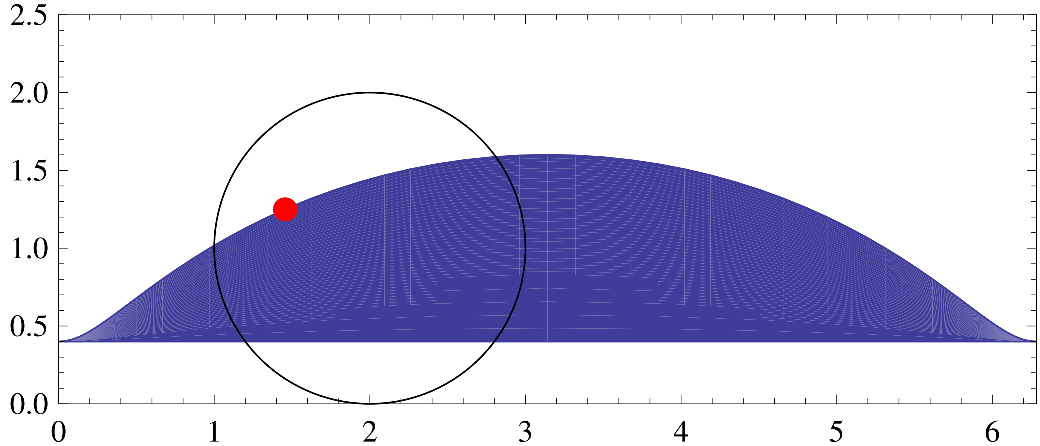
Die Substitution $u = u(x)$ kann nur dann verwendet werden, um ein endliches Integral $\int_a^b g(x)dx$ mit $a < b$ zu berechnen, wenn die Funktion u im Intervall $[a, b]$ injektiv ist. Falls u nicht injektiv ist, dann impliziert der Mittelwertsatz, dass ein $\xi \in (a, b)$ mit $u'(\xi) = 0$ existiert. Es gibt also eine Stelle im Intervall (a, b), an der $\frac{du}{dx} = 0$ ist. Somit können wir dx nicht als $dx = f(u)du$ anschreiben. Dies ist jedoch essentiell, um die Substitution durchzuführen.

Siehe nächstes Blatt!

5. Die verkürzte Zykloide ist die Kurve die von einem Punkt auf einem rollenden Rad beschrieben wird. Eine Parameterdarstellung ist

$$\begin{cases} x(t) &= at - b\sin t \\ y(t) &= a - b\cos t, \end{cases}$$

mit $a > b > 0$. Berechnen Sie den Flächeninhalt der gefärbten Fläche.



(a) $(2a^2 + b^2 - 2ab)\pi$.

(b) $(2a^2 - 2a + b^2 + 2b)\pi$.

(c) $(2a^2 + b^2)\pi$.

√ (d) $(b^2 + 2ab)\pi$.

Um die Flächenformel

$$\int_{x_0}^{x_1} y\, dx$$

zu benützen, berechnen wir

$$\frac{dx}{dt} = a - b\cos t,$$

und also

$$dx = (a - b\cos t)dt.$$

Die Zahl a ist der Radius des rollenden Rads; b ist der Abstand des Punktes zum Mittelpunkt des Rads. Der gesuchte Flächeninhalt ist gleich

$$F = \int_0^{2\pi} (a - b\cos t)(a - b\cos t)\, dt - \int_0^{2\pi a} (a - b)\, dx$$

$$= \int_0^{2\pi} (a^2 - 2ab\cos t + b^2\cos^2 t)\, dt - 2\pi a(a - b)$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(a^2 - 2ab\cos t + b^2 \cdot \frac{1 + \cos(2t)}{2}\right) dt - 2\pi a(a - b)$$

$$= \left[a^2 t - 2ab\sin t + \frac{b^2}{2}(t + \frac{\sin(2t)}{2})\right]_0^{2\pi} - 2\pi a(a - b) = 2a^2\pi + b^2\pi - 2\pi a(a - b) = (b^2 + 2ab)\pi.$$

Bitte wenden!

2. Berechne die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$ *(Hinweis: Substituiere $u^2 = e^x - 1$);*

b) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^4+3}$ *(Hinweis: Substituiere $u = x^2$);*

c) $\displaystyle\int \frac{1}{\cosh x}\,dx;$

d) $\displaystyle\int_3^4 x^3\cos(x^2)dx;$

e) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{\arcsin\left(\sqrt{1-4x^2}\right)}{\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}}\,dx;$

f) $\displaystyle\int \frac{x}{x^3+x^2-x-1}dx;$

g) $\displaystyle\int \frac{2x^3+5x^2+4x+1}{x^4+2x^3+3x^2+2x+2}dx$ *(Hinweis: Das Polynom x^2+1 ist ein Faktor des Nenners.);*

h) $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^4+2x^2}dx.$

Lösung:

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$. Subst. $u^2 = e^x - 1$. Dann ist $2u\,du = e^x\,dx = (u^2+1)\,dx$.

$$\Longrightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}} = \int \frac{2u\,du}{(1+u^2)\,u} = 2\arctan u + C = 2\arctan\sqrt{e^x-1} + C$$

b) Mit der Substitution $u = x^2$ gilt $du = 2x\,dx$, oder auch $x\,dx = \frac{1}{2}\,du$. Daher haben wir

$$\int \frac{x\,dx}{x^4+3} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2+3} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{3\left(\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right)} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}\,du}{\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right) + C = \frac{\sqrt{3}}{6}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}x^2\right) + C.$$

Im letzten Schritt haben wir dabei $u = x^2$ rücksubstituiert.

c) Einsetzen der Definition von $\cosh x$ liefert

$$\int \frac{dx}{\cosh x} = \int \frac{2\,dx}{e^x+e^{-x}}.$$

Nun bietet sich die Substitution $u = e^x$ an, also gilt $x = \ln u$ und damit $dx = \frac{1}{u}\,du$. Es folgt

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\cosh x} &= \int \frac{2\,du}{u\,(u+u^{-1})} = \int \frac{2\,du}{u^2+1} = 2\arctan u + C\\ &= 2\arctan(e^x) + C.\end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

Variante: Wir erweitern mit $\cosh x$ und benutzen die Identität $\cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x$.

$$\int \frac{dx}{\cosh x} = \int \frac{\cosh x}{\cosh^2}\, dx = \int \frac{\cosh x}{1+\sinh^2 x}\, dx.$$

Nun substituieren wir $u = \sinh x$, d. h. $du = \cosh x\, dx$. Also

$$\int \frac{dx}{\cosh x} = \int \frac{du}{1+u^2} = \arctan(u) + D = \arctan(\sinh x) + D.$$

Diese beiden Stammfunktionen $2\arctan(e^x)$ und $\arctan(\sinh x)$ von $\frac{1}{\cosh x}$ unterscheiden sich tatsächlich nur um eine Konstante (um $\frac{\pi}{2}$), das ist aber nicht ganz einfach zu zeigen!

d) Es sei $t = x^2$. Dann ist $dt = 2xdx$, $t(3) = 9$ und $t(4) = 16$. Somit ist

$$\int_3^4 x^3 \cos(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_9^{16} t\cos(t) dt.$$

Nun verwenden wir partielle Integration mit $u(t) = t$ und $v'(t) = \cos(t)$ und erhalten

$$\frac{1}{2}\left[t\sin(t)\right]_9^{16} - \frac{1}{2}\int_9^{16} \sin(t) dt = \frac{1}{2}\left(16\sin(16) - 9\sin(9)\right) + \frac{1}{2}\left[\cos(t)\right]_9^{16}$$

$$= \frac{1}{2}\left(16\sin(16) - 9\sin(9) + \cos(16) - \cos(9)\right).$$

e) Im Kapitel über die Umkehrfunktion haben wir gesehen, dass $\arcsin(\sin u) = u$ gilt für $u \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Weiter gilt $\sin u = \sqrt{1-\cos^2 u}$. Diese Beziehungen können wir offenbar mit der Substitution $2x = \cos u$ ausnutzen; also gilt $2\, dx = -\sin u\, du$. Ausserdem ist die Funktion $x(u) = \frac{1}{2}\cos u$ für $u \in [0, \pi]$ invertierbar, nämlich $u = \arccos(2x)$. Wir transformieren die Grenzen:

$$x = 0 \Rightarrow u = \arccos(0) = \tfrac{\pi}{2}, \quad x = \tfrac{1}{4} \Rightarrow u = \arccos(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{\pi}{3}.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{\arcsin\sqrt{1-4x^2}}{\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}}\, dx = 2\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{\arcsin\sqrt{1-4x^2}}{\sqrt{1-4x^2}}\, dx \\ = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\arcsin(\sin u)}{\sin u} \sin u\, du \\ = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} u\, du = \left[\frac{1}{2}u^2\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{5}{72}\pi^2.\end{aligned}$$

f) Durch Ausprobieren finden wir, dass 1 eine Nullstelle des Nenners ist. Mit Polynomdivision ergibt sich $(x^3 + x^2 - x - 1) : (x-1) = x^2 + 2x + 1$, was das Quadrat von $x+1$ ist. Also faktorisieren wir $x^3 + x^2 - x - 1 = (x-1)(x+1)^2$. Der Ansatz der Partialbruchzerlegung ergibt

$$\begin{aligned}\frac{x}{x^3+x^2-x-1} &= \frac{x}{(x-1)(x+1)^2} \stackrel{!}{=} \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-1} \\ &= \frac{(A+C)x^2 + (B+2C)x + (-A-B+C)}{(x-1)(x+1)^2}.\end{aligned}$$

Bitte wenden!

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir $A = -\frac{1}{4}$, $B = \frac{1}{2}$ und $C = \frac{1}{4}$. Somit ist

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{x^3+x^2-x-1}dx &= -\frac{1}{4}\int \frac{1}{x+1}dx + \frac{1}{4}\int \frac{1}{x-1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x+1)^2}dx \\ &= -\frac{1}{4}\ln|x+1| + \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\frac{1}{x+1} + C \\ &= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2}\frac{1}{x+1} + C.\end{aligned}$$

g) Da x^2+1 das Nennerpolynom teilt, erhalten wir durch Polynomdivision $(x^4+2x^3+3x^2+2x+2):(x^2+1) = (x^2+2x+2)$. Das Polynom x^2+2x+2 hat keine reellen Nullstellen, wir betrachten daher als Partialbruchzerlegung

$$\begin{aligned}\frac{2x^3+5x^2+4x+1}{x^4+2x^3+3x^2+2x+2} &\overset{!}{=} \frac{Ax+C}{x^2+1} + \frac{Bx+D}{x^2+2x+2} \\ &= \frac{(A+B)x^3+(2A+C+D)x^2+(2A+B+2C)x+2C+D}{(x^2+1)(x^2+2x+2)}.\end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert $A = 2$, $B = C = 0$ und $D = 1$. Also

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^3+5x^2+4x+1}{x^4+2x^3+3x^2+2x+2}dx &= \int \frac{2x}{x^2+1}\,dx + \int \frac{1}{x^2+2x+2}dx \\ &= \ln|x^2+1| + \int \frac{1}{(x+1)^2+1}dx \\ &= \ln(x^2+1) + \arctan(x+1) + C.\end{aligned}$$

h) Zunächst gilt $x^4+2x^2 = x^2(x^2+2)$, und x^2+2 hat keine reellen Nullstellen. Wir setzen also

$$\begin{aligned}\frac{x+2}{x^2(x^2+2)} &\overset{!}{=} \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+2} \\ &= \frac{(A+C)x^3+(B+D)x^2+2Ax+2B}{x^2(x^2+2)},\end{aligned}$$

woraus folgt: $A = \frac{1}{2}$, $B = 1$, $C = -\frac{1}{2}$ und $D = -1$. Somit

$$\begin{aligned}\int \frac{x+2}{x^2(x^2+2)}dx &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}dx + \int \frac{1}{x^2}dx - \frac{1}{2}\int \frac{x+2}{x^2+2}dx \\ &= \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\int \frac{x}{x^2+2}dx - \int \frac{1}{x^2+2}dx \\ &= \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{1}{4}\int \frac{2x}{x^2+2}dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1}dx \\ &= \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{1}{4}\ln(x^2+2) - \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C.\end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

3. Die *Kardioide* oder *Herzkurve* ist gegeben durch

$$r(\varphi) = a(1 + \cos\varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi]$$

mit einer Konstante $a \in \mathbb{R}_{>0}$. Bestimmen Sie die Bogenlänge dieser Kurve.

Lösung: Wir berechnen

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2}\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi}\, d\varphi \\ &= \sqrt{2}a \int_0^{2\pi} \sqrt{1+\cos(\varphi)}\, d\varphi \overset{(*)}{=} 8a, \end{aligned}$$

wobei man in $(*)$ das Integral bspw. mittels der Identität

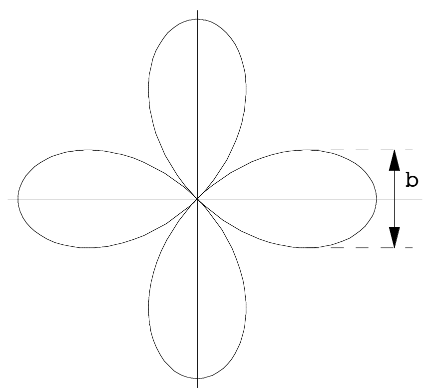
$$1 + \cos\varphi = 2\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

auflösen kann.

4. Durch

$$\varrho = a\,|\cos(2\varphi)|$$

mit $a > 0$ wird in Polarkoordinaten der Rand eines Kleeblattes parametrisiert.



a) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Kleeblattes.

b) Bestimmen Sie die Breite b des Kleeblattes.

Lösung:

a) Für die Fläche erhalten wir nach der bekannten Formel

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \varrho(\varphi)^2\, d\varphi = \frac{1}{2}a^2 \int_0^{2\pi} \cos^2(2\varphi)\, d\varphi = \frac{a^2}{4}\int_0^{2\pi} (1+\cos(4\varphi))\, d\varphi \\ &= \frac{a^2}{4}\left[\varphi + \frac{1}{4}\sin(4\varphi)\right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} = \frac{\pi a^2}{2}. \end{aligned}$$

Bitte wenden!

b) Um die Breite zu bestimmen, benötigen wir die y-Koordinate desjenigen Punktes im ersten Quadranten, an dem die Tangente an der Kurve horizontal ist. Dazu bestimmen wir zunächst die kartesischen Komponenten der Kurve:

$$\begin{aligned}(x(\varphi), y(\varphi)) &= (\varrho(\varphi)\cos\varphi, \varrho(\varphi)\sin\varphi) \\ &= (a\cos(\varphi)|\cos(2\varphi)|, a\sin\varphi|\cos(2\varphi)|)\,.\end{aligned}$$

Aus der Skizze wird klar, dass wir einen Punkt mit $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$ suchen. Dort ist also $\cos(2\varphi) > 0$, und wir finden

$$\begin{aligned}0 &= \frac{dy}{d\varphi} = \frac{d}{d\varphi}(a\sin\varphi\cos(2\varphi)) = a\cos\varphi\cos(2\varphi) - 2a\sin\varphi\sin(2\varphi) \\ &= a\left[\cos\varphi(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) - 4\sin^2\varphi\cos\varphi\right] = a\cos\varphi\left(\cos^2\varphi - 5\sin^2\varphi\right) \\ &= a\cos\varphi\left(1 - 6\sin^2\varphi\right)\,.\end{aligned}$$

Die einzige Lösung hiervon im Intervall $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ist

$$\varphi_0 = \arcsin\frac{1}{\sqrt{6}},$$

und die Breite ergibt sich zu

$$\begin{aligned}b &= 2y(\varphi_0) = 2a\sin\varphi_0\cos(2\varphi_0) = 2a\sin\varphi_0(1 - 2\sin^2\varphi_0) = \frac{2a}{\sqrt{6}}\left(1 - \frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{4a}{3\sqrt{6}}.\end{aligned}$$

5. Berechnen Sie den Flächeninhalt den die folgenden Kurven im Bereich $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ einschliessen.

a) $r = \sqrt{\varphi}$

Wir berechnen

$$\begin{aligned}F &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r(\varphi)^2\,d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{\varphi}^2\,d\varphi \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \varphi\,d\varphi = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\varphi^2\right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{4}4\pi^2 = \pi^2.\end{aligned}$$

b) $r = \frac{1}{1+\varphi}$

Wir berechnen

$$\begin{aligned}F &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{1+\varphi}\right)^2 d\varphi = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{1+\varphi}\right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2+4\pi}.\end{aligned}$$

c) $r = |\sin(\varphi)|$

Wir berechnen

$$\begin{aligned}F &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} |\sin(\varphi)|^2\,d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin(\varphi)^2\,d\varphi \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{4}\sin(2\varphi)\right]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$