Lösung - Serie 3

1. MC-Aufgaben (Online-Abgabe)

1. Es sei die Funktion $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ definiert durch $f(x) = \ln(x^2+1)$, wobei der Logarithmus $\ln$ zur Basis e ist. Welche Gleichung beschreibt die Umkehrfunktion $f^{-1}\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$?

(a) Die Umkehrfunktion existiert nicht.

(b) $f^{-1}(x) = \ln(x^2-1)$

(c) $f^{-1}(x) = e^{x^2+1}$

(d) $f^{-1}(x) = e^{x-1}$

$\surd$ (e) $f^{-1}(x) = \sqrt{e^x - 1}$

Die Funktion ist im Definitionsbereich $[0,\infty)$ streng monoton wachsend, also injektiv. Des Weiteren ist sie surjektiv, also umkehrbar. Sei $y = \ln(x^2+1)$. Lösen wir nach x auf, so erhalten wir $x = \sqrt{e^y - 1}$. Vertauschen von x und y führt schließlich zu $f^{-1}(x) = \sqrt{e^x - 1}$.

2. Es sei $f(x) = \cos(x^2)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

$\surd$ (a) Es sei $D = [\sqrt{\pi}, \sqrt{2\pi}]$. Dann ist die Funktion $f\colon D \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x)$ injektiv.

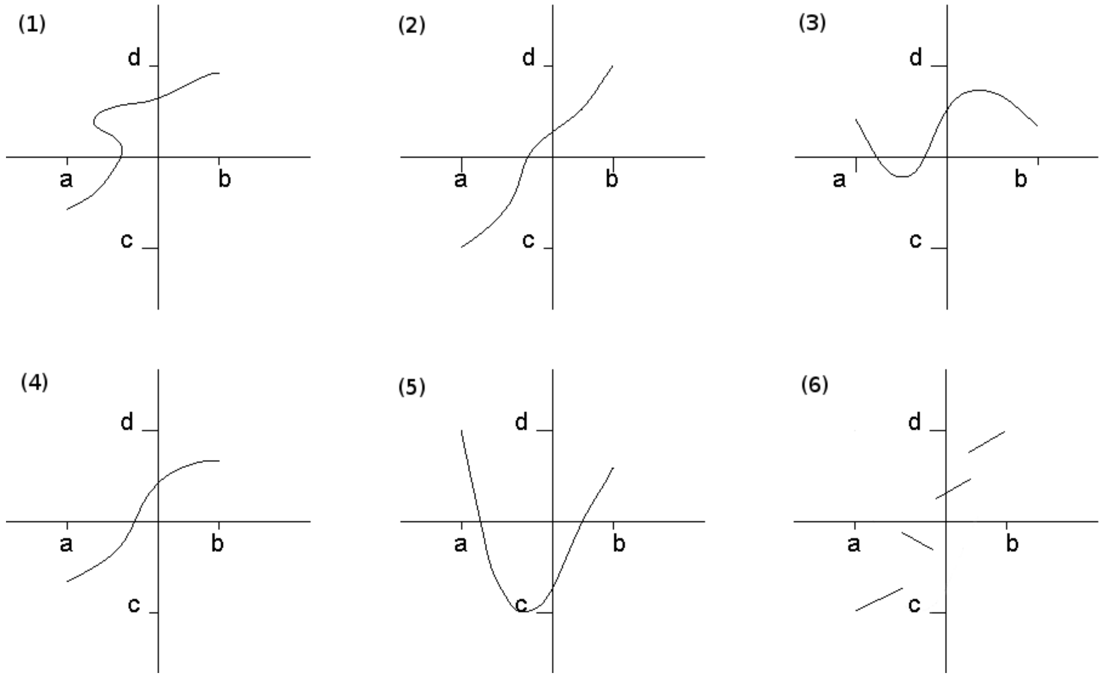
(b) Das Bild von D unter f, also $\{f(x) : x \in D(f)\}$, ist gleich $[0,1]$.

$\surd$ (c) Die Funktion $g : \left[0, \sqrt{1/2}\right] \to [\sqrt{\pi}/2, \sqrt{\pi}/\sqrt{2}]$ gegeben durch $g(x) = \sqrt{\arccos x}$ ist die Umkehrfunktion von der Funktion $f\colon [\sqrt{\pi}/2, \sqrt{\pi}/\sqrt{2}] \to \left[0, \sqrt{1/2}\right],\ x \mapsto f(x)$.

Die Funktion f ist auf D streng monoton steigend und folglich injektiv. Weiters ist $\cos(\pi) = -1$, also ist -1 im Bild von D unter f enthalten und dieses Bild kann somit nicht gleich $[0,1]$ sein. Da $f(g(x)) = \cos(\sqrt{\arccos x}^2) = \cos(\arccos x) = x$ für $x \in [0, \sqrt{1/2}]$ und das Bild von $[\sqrt{\pi}/2, \sqrt{\pi}/\sqrt{2}]$ unter f gleich $[0, 1/\sqrt{2}]$ ist, ist g in der Tat die Umkehrfunktion von f im gefragten Intervall.

Bitte wenden!

3. Welche der folgenden Bilder beschreiben den Graph einer injektiven Funktion $[a, b] \to [c, d]$?



(a) (1)

√ (b) (2)

(c) (3)

√ (d) (4)

(e) (5)

√ (f) (6)

(1) ist kein Graph einer Funktion, weil verschiedene y-Koordinaten mit derselben x-Koordinate möglich sind. In (3) und (5) sind verschiedene x-Koordinaten mit derselben y-Koordinate möglich; in diesen Fällen ist die Funktion also nicht injektiv. Für (2), (4) und (6) tritt dieses Problem nicht auf; deshalb sind sie Graphen zweier injektiver Funktionen auf einem geeigneten Definitionsintervall.

4. Eine Funktion g heisst *Asymptote* einer Funktion f für $x \to \infty$, falls $\lim_{x\to\infty} \big(f(x) - g(x)\big) = 0$ gilt. Es sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \frac{e^{2x} + 1}{e^x + 1}.$$

Welche der folgenden Funktionen ist eine Asymptote von f für $x \to \infty$?

(a) $g(x) = e^x$

(b) $g(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$

√ (c) $g(x) = e^x - 1$

(d) $g(x) = e^x - e^{-x}$

(e) $g(x) = e^{-x}$

Es gilt

$$f(x) = \frac{e^{2x} + 1}{e^x + 1} = e^x - 1 + 2/(e^x + 1).$$

Terme, die hier für $x \to \infty$ nicht gegen Null konvergieren, sind Terme, die in der Funktion g vorkommen. Also $g(x) = e^x - 1$.

5. Es sei $f(x) = \frac{x^3-1}{2x^3+1}$. Welche Aussage ist richtig?

(a) $f'(x) = \frac{-36x^2(x^3-1)^3}{(2x^3+1)^5}$

√ (b) $f'(x) = \frac{9x^2}{(1+2x^3)^2}$

(c) $f'(x) = \frac{36x^2(x^3-1)^3}{(2x^3+1)^4}$

(d) $f'(x) = \frac{72x^2(x^3-1)^3}{(2x^3+1)^5}$

2. Gegeben seien die Funktionen

$$\begin{array}{ll} f_1\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}, & x\mapsto 2x-6 \\ f_2\colon \mathbb{R}\to[0,\infty), & x\mapsto |x| \\ f_3\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}, & x\mapsto \min\{x^2-9,0\} \\ f_4\colon \mathbb{R}\setminus\{3\}\to\mathbb{R}, & x\mapsto \frac{x+1}{f_1(x)}. \end{array}$$

a) Untersuche alle Funktionen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

b) Skizziere auf dem Intervall $[-5,5]$ die Funktionen $g := f_3 - f_1$,

$$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \qquad x\mapsto f_3(x)-f_1(x),$$

und $h := f_2\circ g$,

$$h:\mathbb{R}\to[0,\infty), \qquad x\mapsto f_2(g(x)).$$

c) Bestimme die Umkehrfunktion $f_4^{-1} : W(f_4)\to\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

(*Hinweis:* Sie müssen $W(f_4)=\mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{2}\}$ hierzu nicht explizit berechnen.)

Lösung:

a) Untersuchen Sie alle Funktionen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

In der Vorlesung wurde für eine Funktion f Injektivität definiert als

$$x_1\neq x_2 \Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2),$$

das ist logisch äquivalent zu

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2.$$

- f_1 ist bijektiv:

$$2x_1-6=2x_2-6 \;\Rightarrow\; x_1=x_2 \qquad f_1 \text{ ist injektiv}$$

$$y\in\mathbb{R} \text{ beliebig, wähle } x=\frac{y+6}{2} \;\Rightarrow\; f_1(x)=y \qquad f_1 \text{ ist surjektiv}$$

- f_2 ist nicht bijektiv:

$$\text{(z.B.) für } x_1=-1, x_2=1 \text{ ist } f_2(x_1)=f_2(x_2) \qquad f_2 \text{ ist nicht injektiv}$$

$$y\in[0,\infty) \text{ beliebig, wähle z.B. } x=-y \;\Rightarrow\; f_2(x)=y \qquad f_2 \text{ ist surjektiv}$$

- f_3 ist nicht bijektiv:

$$\text{(z.B.) für } x_1=-5, x_2=8 \text{ ist } f_3(x_1)=f_3(x_2) \qquad f_3 \text{ ist nicht injektiv}$$

$$\text{(z.B.) für } y=2 \text{ gibt es kein } x\in\mathbb{R}, \text{ so dass } f_3(x)=y \qquad f_3 \text{ ist nicht surjektiv}$$

- Wir beginnen, indem wir $f_4(x)$ umformen:

$$f_4(x)=\frac{x+1}{2x-6}=\frac{1}{2}\frac{x+1}{x-3}=\frac{1}{2}\frac{(x-3)+4}{x-3}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{4}{x-3}\right)=\frac{1}{2}+\frac{2}{x-3}.$$

Damit erkennt man leichter:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}+\frac{2}{x_1-3}=\frac{1}{2}+\frac{2}{x_2-3} \quad &\Rightarrow \quad \frac{2}{x_1-3}=\frac{2}{x_2-3} \\ &\Rightarrow \quad x_1-3=x_2-3 \Rightarrow x_1=x_2 \qquad f_4 \text{ ist injektiv} \end{aligned}$$

$$\frac{2}{x-3}\neq 0 \text{ für alle } x\in\mathbb{R}\setminus\{3\}, \text{ so dass } \frac{1}{2}\notin W(f_4) \qquad f_4 \text{ ist nicht surjektiv}$$

Somit ist f_4 nicht bijektiv.

Siehe nächstes Blatt!

b) Skizzieren Sie auf dem Intervall $[-5, 5]$ die Funktionen $g := f_3 - f_1$,

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto f_3(x) - f_1(x),$$

und $h := f_2 \circ g$,

$$h : \mathbb{R} \to [0, \infty), \qquad x \mapsto f_2(g(x)).$$

Siehe Abbildungen 1 und 2; Bemerkung: Da f_2 die Betragsfunktion ist, erhält man den Graphen von h, indem man den Teil des Graphen von g, welcher unterhalb der x-Achse liegt, an der x-Achse spiegelt.

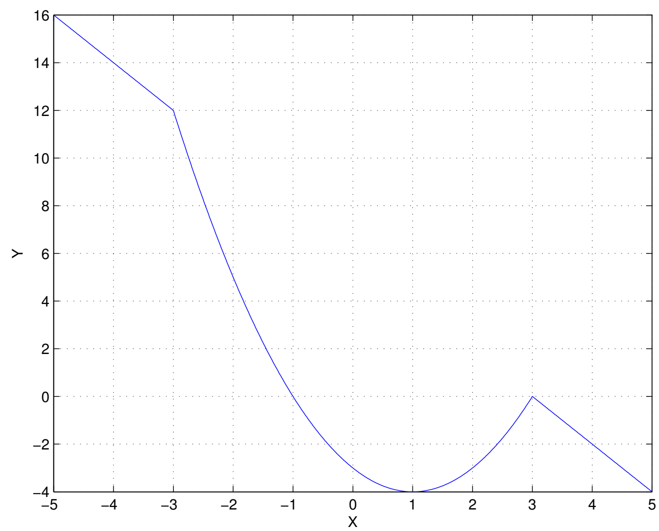


Abbildung 1: Aufgabe 4. b) Funktion g

c) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion $f_4^{-1} : W(f_4) \to \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Wir müssen die Gleichung $y = f_4(x)$ nach x auflösen:

$$\begin{aligned} y = \frac{x+1}{2x-6} \quad &\Leftrightarrow \quad x + 1 = 2xy - 6y \\ &\Leftrightarrow \quad 6y + 1 = 2xy - x \\ &\Leftrightarrow \quad 6y + 1 = x(2y - 1) \\ &\Leftrightarrow \quad x = \frac{6y+1}{2y-1}. \end{aligned}$$

Jetzt vertauschen wir noch die Variablen x und y und erhalten:

$$f_4^{-1} : \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\} \to \mathbb{R} \setminus \{3\}, \qquad x \mapsto \frac{6x+1}{2x-1}.$$

Bitte wenden!

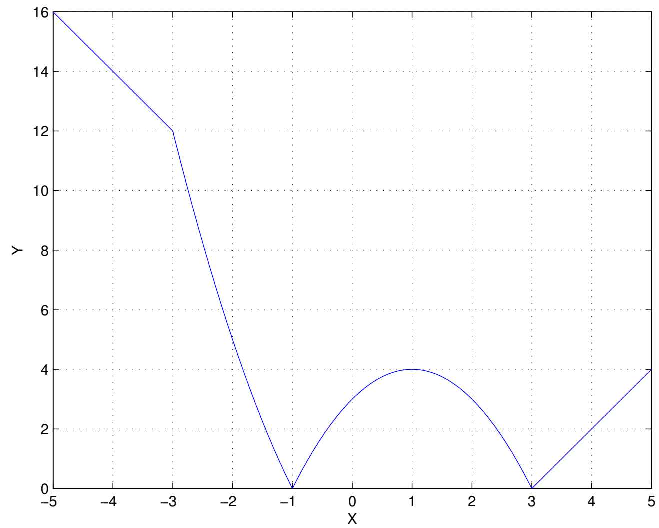


Abbildung 2: Aufgabe 4. b) Funktion h

3. **a)** Gegeben sei die Funktion f mit Definitionsbereich $D(f) = (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ durch die Abbildungsvorschrift $f(x) = \tan(x)$. Bestimme die inverse Funktion von f.

b) Es sei $a \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt. Finden Sie alle reellen Lösungen x der Gleichung

$$\tan\big(\pi\big(1 + \tfrac{1}{2}\cos(x)\big)\big) = a.$$

Lösung:

a) Wir nutzen zunächst aus, dass die Funktion $\tan$ π-periodisch ist. Daher ist $f(x) = \tan(x) = \tan(x - \pi)$ für alle x. Wegen $x \in D(f) = \big(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\big)$ ist dann $x' := x - \pi \in \big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big)$. Also ist

$$\arctan(f(x)) = \arctan(\tan(x - \pi)) = \arctan(\tan(x')) = x' = x - \pi.$$

Schreiben wir $y = f(x)$, so liefert Auflösen der obigen Gleichung nach x, dass $y \mapsto g(y) := \arctan(y) + \pi$ die gesuchte Inverse ist. Da $f : D(f) \to \mathbb{R}$ surjektiv ist (d. h. zu jedem $y \in \mathbb{R}$ gibt es ein $x \in D(f)$ mit $f(x) = y$) kann als Definitionsbereich von g ganz $\mathbb{R}$ gewählt werden: $D(g) = \mathbb{R}$.

b) Wegen $\cos(x) \in [-1, 1]$ liegt das Argument des Tangens $\pi(1 + \frac{1}{2}\cos(x))$ in $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$. Da aber der Tangens weder für $\frac{\pi}{2}$ noch für $\frac{3\pi}{2}$ definiert ist, muss auf jeden Fall zunächst $\pi(1 + \frac{1}{2}\cos(x)) \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ gelten, also $\cos(x) \in (-1, 1)$. Wir erkennen in $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ den Definitionsbereich $D(f)$ von f wieder, also den Wertebereich der inversen Funktion g. Aus

$$\tan(\pi(1 + \frac{1}{2}\cos(x))) = f(\pi(1 + \frac{1}{2}\cos(x))) = g^{-1}(\pi(1 + \frac{1}{2}\cos(x)))$$

folgt dann, dass

$$g^{-1}(\pi(1 + \frac{1}{2}\cos(x))) = a = g^{-1}(g(a))$$

ist. Da g injektiv ist, schließen wir daraus

$$\pi(1 + \frac{1}{2}\cos(x)) = g(a) = \arctan(a) + \pi,$$

Siehe nächstes Blatt!

also

$$\cos(x) = \frac{2}{\pi}\arctan(a).$$

Somit sind alle Lösungen von der Form

$$x = \pm\arccos\left(\frac{2}{\pi}\arctan(a)\right) + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Alternativer Lösungweg: Wegen der π-Periodizität der $\tan$-Funktion ist

$$a = \tan(\pi(1 + \frac{1}{2}\cos(x))) = \tan(\frac{\pi}{2}\cos(x)).$$

Das Argument $\frac{\pi}{2}\cos(x)$ des Tangens liegt nun in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, und wir können direkt die Umkehrfunktion $\arctan$ anwenden.

Ein weiterer, aber **falscher** *Lösungsweg:* Wir wenden die Funktion $\arctan$ direkt auf beide Seiten der Gleichung an und erhalten

$$\arctan(a) = \arctan(\tan(\pi(1 + \frac{1}{2}\cos(x)))) = \pi(1 + \frac{1}{2}\cos(x)),$$

was offensichtlich nicht mit obigem Resultat übereinstimmt. Der Fehler liegt darin, dass im allgemeinen *nicht*

$$\arctan(\tan(z)) = z$$

gilt. Gleichheit besteht nämlich nur für $z \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, da der Wertebereich von $\arctan$ per Definition $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ist.

Fazit: Muss eine nicht injektive Funktion (wie hier der $\tan$) erst auf einen kleineren Definitionsbereich eingeschränkt werden, damit sie umkehrbar ist, so ist bei der Anwendung der Umkehrfunktion Vorsicht geboten! Das gleiche Problem tritt übrigens auch bei den Funktionen $\arcsin$ und $\arccos$ auf.

4. Bestimme bei jeder der folgenden Funktionen, welche für alle reellen Zahlen $t > 0$ definiert sind, jeweils eine Asymptote der Form $at + b$ für $t \to +\infty$:

a) $f(t) = \frac{t}{t+\sqrt{t}}$;

b) $g(t) = \sqrt{4t^2 + 3}$;

c) $h(t) = 3t + \cos(1/t)$;

d) $i(t) = \ln(1 + e^t)$.

Zeichne die Graphen der Funktionen und die dazugehörigen Asymptoten.

Lösung:

a) Da

$$\frac{t}{t + \sqrt{t}} - 1 = \frac{-1}{\sqrt{t} + 1} \to 0$$

für $t \to \infty$, ist die Asymptote die Gerade $t \mapsto 1$.

b) Da
$$\sqrt{4t^2+3}-2t=\frac{3}{\sqrt{4t^2+3}+2t}\to 0$$
für $t\to\infty$, ist die Asymptote die Gerade $t\mapsto 2t$.

c) Da $\cos(1/t)\to\cos(0)=1$ für $t\to\infty$, ist die Asymptote die Gerade $t\mapsto 3t+1$.

d) Da
$$\log(1+e^t)-t=\log(1+e^t)-\log(e^t)=\log(1+e^{-t})\to\log(1)=0$$
für $t\to\infty$, ist die Asymptote die Gerade $t\mapsto t$.

5. Berechne $f'\colon D(f)\to\mathbb{R}$ für

a) $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto x\sin(x)$;

b) $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto\frac{1}{x^2+3}$;

c) $f\colon(0,\pi)\to\mathbb{R},\ x\mapsto\frac{1}{\sin x}$;

d) $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto e^{-x}$;

e) $f\colon(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\to\mathbb{R},\ x\mapsto(\tan x)^2$;

f) $f\colon\mathbb{R}_{\geq 1}\to\mathbb{R},\ x\mapsto\sqrt{\ln x}$;

g) $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{für } x\neq 0\\ 0 & \text{für } x=0\end{cases}$;

h) $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto\begin{cases}x^2\sin(\frac{1}{x}) & \text{für } x\neq 0\\ 0 & \text{für } x=0\end{cases}$.

*Zeige, dass die Ableitung der Funktion aus Teilaufgabe **h)** im Punkt $x=0$ nicht stetig ist.

Lösung:

a) $\frac{d}{dx}(x\sin x)=\sin x+x\cos x$ (Produktregel)

b) $\frac{d}{dx}\left((x^2+3)^{-1}\right)=(-1)(x^2+3)^{-2}\cdot 2x=\frac{-2x}{(x^2+3)^2}$ (Kettenregel)

c) $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sin x}\right)=-\frac{\cos x}{\sin^2 x}$ (Kettenregel oder Quotientenregel)

d) $\frac{d}{dx}\left(e^{-x}\right)=-e^{-x}$ (Kettenregel)

e) $\frac{d}{dx}\left((\tan x)^2\right)=2(\tan x)\cdot\frac{1}{\cos^2 x}=2\frac{\sin x}{\cos^3 x}$ (Kettenregel, Abl. von $\tan x$)

f) $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{\ln x}\right)=\frac{1}{2\sqrt{\ln x}}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$ (Kettenregel und Ableitung von $\ln x$)

g) Es sei $x\neq 0$. Es gilt $\frac{d}{dx}\left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right)=2\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3}$ (Kettenregel).

Weiter gilt
$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{h}}{e^{\frac{1}{h^2}}},$$
weil
$$\lim_{h\to 0^+}\frac{\frac{1}{h}}{e^{\frac{1}{h^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x^2}}=0$$

Siehe nächstes Blatt!

und

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{\frac{1}{h}}{e^{\frac{1}{h^2}}} = \lim_{h\to 0^+} \frac{-\frac{1}{h}}{e^{\frac{1}{h^2}}} = -\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{x^2}} = 0,$$

wobei wir die Substitution $x = \frac{1}{h}$ gemacht haben, gilt $f'(0) = 0$ (weil der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert übereinstimmen).

h) Es sei $x \neq 0$. Wir berechnen

$$\frac{d}{dx}\left(x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \text{(Kettenregel und Produktregel).}$$

Weiter gilt

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \sin\left(\frac{1}{h}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} h\sin\left(\frac{1}{h}\right).$$

Weil $|\sin(x)| \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$,

$$\left|h\sin\left(\frac{1}{h}\right)\right| \leq |h|\cdot 1 = |h|$$

und deshalb lässt sich zeigen, dass

$$\left|\lim_{h\to 0} h\sin\left(\frac{1}{h}\right)\right| = \lim_{h\to 0}\left|h\sin\left(\frac{1}{h}\right)\right| \leq \lim_{h\to 0}|h| = 0.$$

Wir haben also gezeigt $|f'(0)| \leq 0$ und somit gilt $f'(0) = 0$. Fasst man alles zusammen erhält man:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Im folgenden zeigen wir, dass die Funktion f' im Punkt $x = 0$ nicht stetig ist. Es gilt

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0}\left(2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \lim_{x\to 0} 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \lim_{x\to 0}\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0 - \lim_{x\to 0}\cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Der Grenzwert $\lim_{x\to 0}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ existiert nicht. Um dass zu zeigen muss man zwei Folgen (a_n), (b_n) finden so dass $a_n \to 0$, $b_n \to 0$ mit $n \to +\infty$ und

$$\lim_{n\to+\infty}\cos\left(\frac{1}{a_n}\right) \neq \lim_{n\to+\infty}\cos\left(\frac{1}{b_n}\right)$$

In der Tat, es sei (a_n) die Folge gegeben durch

$$a_n := \frac{1}{n2\pi}$$

und es sei (b_n) die Folge gegeben durch

$$b_n := \frac{1}{\frac{\pi}{2} + n2\pi}.$$

Beachte, dass $a_n \to 0$ und $b_n \to 0$ falls $n \to +\infty$. Wir berechnen

$$\lim_{n\to+\infty}\cos\left(\frac{1}{a_n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\cos(n2\pi) = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1$$

und

$$\lim_{n\to+\infty}\cos\left(\frac{1}{b_n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\cos\left(\frac{\pi}{2} + n2\pi\right) = \lim_{n\to+\infty} 0 = 0;$$

der Grenzwert $\lim_{x\to 0}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ existiert also nicht und die Funktion f' ist nicht stetig an der Stelle $x = 0$.