Lösung - Serie 4

1. MC-Aufgaben (Online-Abgabe)

1. Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(a) f ist stetig $\Longleftrightarrow$ f ist differenzierbar.

(b) f ist stetig $\Longrightarrow$ f ist differenzierbar.

√ (c) f ist stetig $\Longleftarrow$ f ist differenzierbar.

(d) Es gibt keinen derartigen Zusammenhang zwischen Stetigkeit und Differenzierbarkeit.

Jede differenzierbare Funktion ist stetig. Aber nicht jede stetige Funktion ist differenzierbar, zum Beispiel $x \mapsto |x|$ bei $x = 0$.

2. Wie lautet die Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion

$$f\colon [2,\infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt{x-2},$$

an der Stelle $x = 6$?

(a) $y = -\frac{1}{4}x + \frac{7}{2}$.

√ (b) $y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$.

(c) $y = \frac{1}{2}x - 1$.

(d) $y = x - 4$.

(e) Keine der obigen Antworten ist richtig.

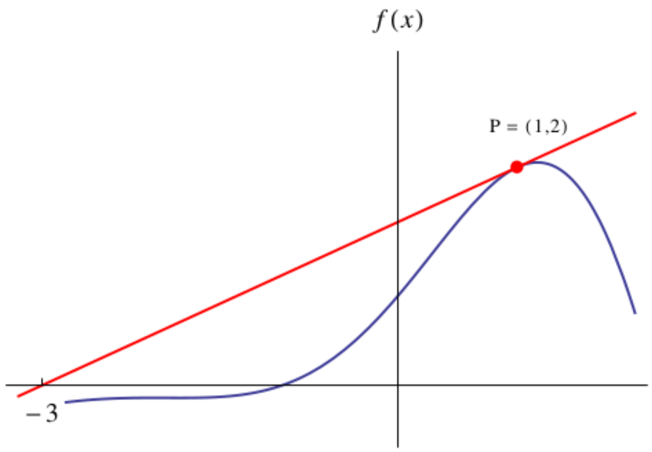
Die Tangente ist durch eine Gleichung der Form $y = ax+b$ gegeben, wobei $a = f'(6)$ ist und b dadurch bestimmt ist, dass die Tangente den Punkt $(6, f(6))$ enthält. Es gilt

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-2}}$$

und damit $a = f'(6) = \frac{1}{4}$. Aus $(6, f(6)) = (6, 2)$ folgt, dass b die Gleichung $2 = \frac{6}{4} + b$ erfüllt, dass also $b = \frac{1}{2}$ gilt. Also ist die Gleichung in (b) die richtige.

Bitte wenden!

3. Im folgenden Bild ist die rote Gerade im Punkt P tangential an die blaue Kurve, die der Graph einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist. Welchen Wert hat die Ableitung f' an der Stelle 1?



(a) 2

Falsch.

√ (b) $\frac{1}{2}$

Richtig! Der Wert $f'(1)$ ist die Steigung m der Geraden, welche die Tangente an den Graphen von f im Punkt $(1, f(1))$ definiert. Die Steigung ist:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2-0}{1-(-3)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

(c) $-\frac{2}{3}$

Falsch.

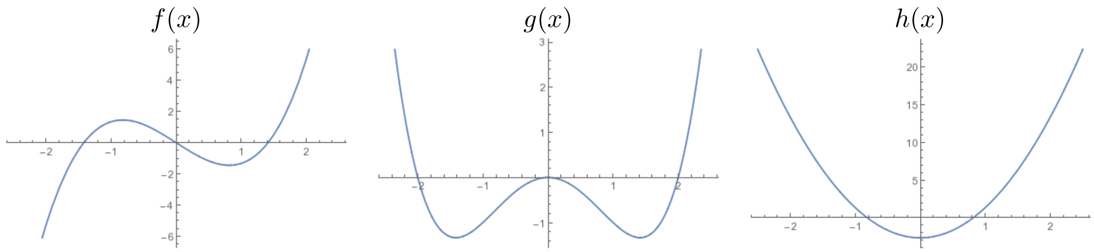
(d) -2

Falsch.

(e) Keiner dieser Werte ist korrekt.

Falsch.

4. Gegeben seien die folgenden Graphen von Funktionen



Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(a) $f' = g$

Falsch. Wenn $f' = g$ gelten würde, dann müsste die Ableitung von f in 0 verschwinden, da g dort eine Nullstelle hat. Man sieht jedoch, dass dies nicht der Fall ist.

√ (b) $g' = f$

Richtig! f hat drei Nullstellen $x_0 < x_1 < x_2$ und an diesen veschwindet offenbar die Ableitung von g. Ausserdem ist g auf $(-\infty, x_0)$ monoton fallend, auf (x_0, x_1) monoton steigend, auf (x_1, x_2) monoton fallend und auf (x_2, ∞) monoton steigend. Auch das passt zu dem Verhalten von f, welche negativ auf $(-\infty, x_0)$ ist, positiv auf (x_0, x_1) ist, negativ auf (x_1, x_2) ist und positiv auf (x_2, ∞) ist. All das sind Indizien dafür, dass die Aussage korrekt ist.

√ (c) $f' = h$

Richtig! h hat zwei Nullstellen $x_0 < x_1$ und an diesen verschwindet offenbar die Ableitung von f. Ausserdem ist f monoton steigend auf $(-\infty, x_0)$, monoton fallend auf (x_0, x_1) und monoton steigend auf (x_1, ∞). Auch das passt zum Verhalten von h, welche positiv auf $(-\infty, x_0)$ ist, negativ auf (x_0, x_1) ist und postiv auf (x_1, ∞) ist. All das sind Indizien dafür, dass die Aussage korrekt ist.

(d) $h' = g$

Falsch. Wenn $h' = g$ gelten würde, dann müsste die Ableitung von h in 2 verschwinden, da g dort eine Nullstelle besitzt. Man sieht jedoch, dass dies nicht der Falls ist.

√ (e) $g'' = h$

Richtig! Das folgt aus $g' = f$ und $f' = h$.

(f) $f'' = g$

Falsch. Wenn $f'' = g$ wäre, dann müsste g für alle $x < 0$ negativ sein; stellt man sich nämlich vor, man würde auf dem Graphen von f mit dem Auto entlang fahren, dann lenkt man bis zum Punkt $(0, 0)$ nach rechts, d.h. $f''(x) < 0$ für alle $x < 0$. Jedoch ist g negativ auf dem Intervall $(-2, 0)$.

Bitte wenden!

2. Berechne $f'\colon D(f) \to \mathbb{R}$ für

a) $f\colon [-1,1] \to [0,\pi],\ x \mapsto \arccos(x)$;

b) $f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \left(x^{\frac{1}{3}} + \sin\left(\arctan(x)\right)\right)^{2017}$;

c) der Umkehrfunktion f von $g\colon (0,+\infty) \to (0,2),\ x \mapsto 2e^{-x^2}$;

Lösung:

a) Mittels der Regel für die Ableitung der Umkehrfunktion berechnen wir

$$f'(x) = \frac{1}{-\sin(\arccos(x))}.$$

Weil $\arccos x \in [0,\pi]$ für alle $x \in [-1,1]$ gilt $\sin(\arccos x) \geq 0$ für alle $x \in [-1,1]$ und deshalb

$$\frac{1}{-\sin(\arccos(x))} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos(\arccos(x))^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Es gilt also

$$\arccos(x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

b) Aus Serie 2 Aufgabe 5d) wissen wir, dass

$$\sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

und deshalb gilt

$$f(x) = \left(\sqrt[3]{x} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^{2017}.$$

Somit berechnen wir mit der Kettenregel

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2017\left(\frac{1}{3x^{2/3}} - \frac{x^2}{(x^2+1)^{3/2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \sqrt[3]{x}\right)^{2016} \\ &= 2017\left(\frac{1}{3x^{2/3}} + \frac{1}{(x^2+1)^{3/2}}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \sqrt[3]{x}\right)^{2016}. \end{aligned}$$

c) Weil

$$2e^{-\left(\sqrt{\ln\left(\frac{2}{x}\right)}\right)^2} = 2e^{-\ln\left(\frac{2}{x}\right)} = 2\frac{1}{\frac{2}{x}} = x,$$

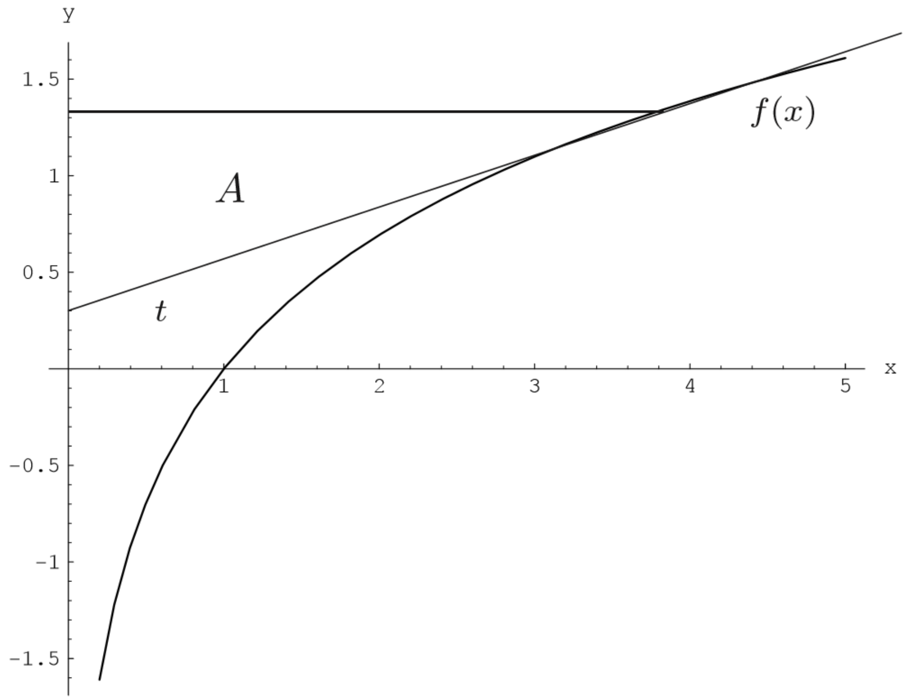
ist die Funktion f gegeben durch $x \mapsto \sqrt{\ln\left(\frac{2}{x}\right)}$. Man kann f nun einfach direkt ableiten oder die Regel für die Ableitung der Umkehrfunktion benutzen. Weil gilt

$$g'(x) = -4xe^{-x^2},$$

berechnen wir mit der Regel für die Ableitung der Umkehrfunktion

$$f'(x) = \frac{1}{-4f(x)e^{-f(x)^2}} = \frac{1}{-4\sqrt{\ln\left(\frac{2}{x}\right)}\frac{x}{2}} = \frac{1}{-2x\sqrt{\ln\left(\frac{2}{x}\right)}} = -\frac{1}{2x\sqrt{\ln\left(\frac{2}{x}\right)}}.$$

3. **a)** Es sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ durch die Abbildungsvorschrift $x \mapsto \ln(x)$ gegeben. Berechne in Abhängigkeit von x die Fläche des Dreiecks A, wobei t die Tangente an den Graphen von f bezeichnet.



b) Es sei nun $f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = 4 - \frac{2}{x}$. Bestimmen Sie einen Wert von x, für den die Fläche des Dreiecks A, konstruiert wie in Teilaufgabe (a), den Wert 1 annimmt.

Lösung:

a) Da die Tangente im Punkt $(x_0, \ln(x_0))$ die Steigung $\frac{1}{x_0}$ hat, folgt, dass die Tangente t am Punkt $(x_0, \ln(x_0))$ gegeben ist durch die Abbildungsvorschrift $x \mapsto \frac{1}{x_0}x + \ln(x_0) - 1$. Die Seite des Dreiecks A welche auf der y-Achse liegt hat also folgende Länge

$$\ln(x_0) - t(0) = \ln(x_0) - (\ln(x_0) - 1) = 1.$$

Somit ist die Fläche des Dreiecks A gleich $\frac{x}{2}$.

b) Da die Tangente im Punkte $(x, 4 - \frac{2}{x})$ die Steigung $\frac{2}{x^2}$ hat, ist die Länge der Seite auf der y-Achse gleich $\frac{2}{x}$. Somit ist die Fläche des Dreiecks A immer gleich 1 und jeder Wert von x zulässig.

4. Es sei x eine kleine Grösse. Finde *lineare Näherungen* (d.h. die lineare Ersatzfunktion im Punkt 0) für die folgenden Ausdrücke:

a) $\frac{1}{(1+x)^2} - 1$;

b) e^{1+x};

c) $(1000 - x)^{\frac{1}{3}}$;

d)* $\prod_{k=0}^{364} \left(1 - \frac{kx}{365}\right)$.

Bitte wenden!

Lösung: Die lineare Ersatzfunktion im Punkt 0 is gegeben durch $x \mapsto xf'(0) + f(0)$. Wir müssen also in jeder Teilaufgabe den Term $f'(0)$ und den Term $f(0)$ berechnen.

a) Wir berechnen

$$\left(\frac{1}{(1+x)^2} - 1\right)' = -\frac{2}{(x+1)^3},$$

und deshalb gilt

$$\frac{1}{(1+x)^2} - 1 \approx -2x.$$

b) Beachte

$$\left(e^{1+x}\right)' = e^{1+x}$$

und deshalb

$$e^{1+x} \approx ex + e.$$

c) Weil

$$\left((1000-x)^{\frac{1}{3}}\right)' = -\frac{1}{3(1000-x)^{2/3}}$$

erhalten wir

$$(1000-x)^{\frac{1}{3}} \approx -\frac{x}{300} + 10.$$

d) Diese Aufgabe lässt sich am einfachsten mit der verallgemeinerten Produktregel lösen. Die verallgemeinerte Produktregel lauetet wie folgt:

$$(u_1 u_2 \cdots u_n)' = \sum_{i=1}^{n} u_1 \cdots u_{i-1} u_i' u_{i+1} \cdots u_n.$$

Falls also z.B. $n = 3$, dann gilt

$$(u_1 u_2 u_3)' = u_1' u_2 u_3 + u_1 u_2' u_3 + u_1 u_2 u_3'.$$

Wir berechnen also

$$\left(\prod_{k=0}^{364}\left(1 - \frac{kx}{365}\right)\right)' = \sum_{k=0}^{364} -\frac{k}{365} \prod_{\ell=0,\ell\neq k}^{364}\left(1 - \frac{\ell x}{365}\right).$$

Wenn wir $x = 0$ setzen dann erhalten wir

$$\sum_{k=0}^{364} -\frac{k}{365} \prod_{\ell=0,\ell\neq k}^{364}\left(1 - \frac{\ell \cdot 0}{365}\right) = \sum_{k=0}^{364} -\frac{k}{365} \prod_{\ell=0,\ell\neq k}^{364} 1 = -\frac{1}{365}\sum_{k=0}^{364} k.$$

Die Gauss'sche Summenformel (welche in der Schnellübung 1, Aufgabe 2 hergeleitet wurde) sagt uns

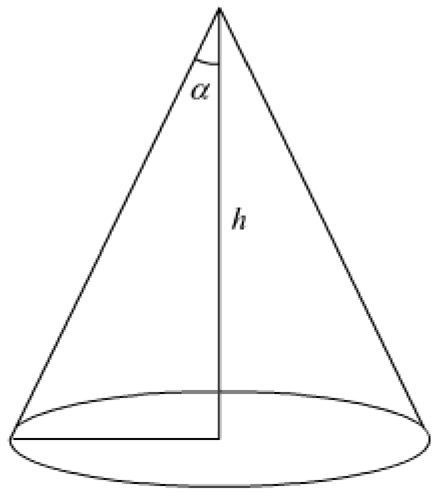
$$\sum_{k=0}^{364} k = \frac{365 \cdot 364}{2}.$$

Wenn man alles zusammenfasst, erhält man folgende Näherung

$$\prod_{k=0}^{364}\left(1 - \frac{kx}{365}\right) \approx -182x + 1.$$

Siehe nächstes Blatt!

5. In einem geraden Kreiskegel sei die Höhe h genau bekannt. Der halbe Öffnungswinkel α wird gemessen, wobei der Messfehler kleiner als $\Delta\alpha$ ist. Wie wirkt sich dieser Messfehler bei der Berechnung des Volumens des Kegels aus? Berechne den *absoluten* und den *relativen* Fehler.



Lösung: Die Gleichung für das Volumen eines geraden Kegels lautet wie folgt

$$V = \frac{1}{3} \cdot \text{Grundfläche} \cdot h.$$

Die Grundfläche ist ein Kreis mit Radius $\tan(\alpha)h$ und hat somit Flächeninhalt $\pi(\tan(\alpha)h)^2$. Deshalb gilt

$$V = V(\alpha) = \frac{\pi}{3}\tan(\alpha)^2 h^3.$$

Wir berechnen mittels der Kettenregel

$$V'(\alpha) = \frac{\pi h^3}{3} 2\tan(\alpha)\tan(\alpha)' = \frac{\pi h^3}{3} 2\tan(\alpha)\frac{1}{\cos(\alpha)^2} = \frac{2\pi h^3}{3}\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)^3}.$$

Wir wissen aus der Vorlesung, dass

$$V(\alpha + \Delta\alpha) \approx V'(\alpha)\Delta\alpha + V(\alpha),$$

also gilt für den absoluten Fehler

$$V(\alpha + \Delta\alpha) - V(\alpha) \approx \frac{2\pi h^3}{3}\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)^3}\Delta\alpha.$$

Für den relativen Fehler gilt

$$\frac{V(\alpha + \Delta\alpha) - V(\alpha)}{V(\alpha)} \approx \frac{\frac{2\pi h^3}{3}\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)^3}\Delta\alpha}{\frac{\pi}{3}\tan(\alpha)^2 h^3} = \frac{2}{\sin(\alpha)\cos(\alpha)}\Delta\alpha = \frac{4}{\sin(2\alpha)}\Delta\alpha.$$