Lösung - Serie 5

1. MC-Aufgaben (Online-Abgabe)

1. Durch zweifache Anwendung der Regel von Bernoulli-de l'Hôpital folgt

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3+x-2}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2+1}{2x-3} = \lim_{x\to 1} \frac{6x}{2} = 3.$$

Stimmt diese Überlegung?

(a) Ja.

(b) Nein, da das Zählerpolynom jeweils einen höheren Grad als das Nennerpolynom hat.

(c) Nein, da Zähler und Nenner des ersten Bruchs für $x \to 1$ nicht beide gegen 0 streben.

√ (d) Nein, da Zähler und Nenner des zweiten Bruchs für $x \to 1$ nicht beide gegen 0 streben.

(e) Nein, da die beiden ersten Brüche keine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktion beschreiben.

Die Regel von Bernoulli-de l'Hôpital ist anwendbar, wenn sowohl der Zähler als auch der Nenner beide gegen 0 (oder beide gegen ∞, s. später in der Vorlesung) streben. Für $x = 1$ gilt $x^3 + x - 2 = 0$ und $x^2-3x+2 = 0$. Damit ist die Regel von de l'Hôpital auf den ersten Bruch anwendbar und das erste "=" stimmt. Für den zweiten Bruch sind dagegen die Voraussetzungen nicht erfüllt, denn, denn der Nenner hat an der Stelle 1 den Wert -1 und der Zähler den Wert 4. Vielmehr gilt:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3+x-2}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2+1}{2x-3} = \frac{3+1}{2-3} = -4.$$

2. Bestimme das globale Maximum der Funktion $f\colon [0,\pi] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin(2x) + 2\sin(x)$.

(a) 2.61

(b) 1.73

√ (c) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

(d) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

Die Ableitung von f ist

$$f'(x) = 2\cos(2x) + 2\cos x = 2(\cos^2 x - \sin^2 x + \cos x) =$$

$$= 2(\cos^2 x - (1 - \cos^2 x) + \cos x) = 2(2\cos^2 x + \cos x - 1).$$

Dabei wurden die Relationen

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x \text{ und } \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

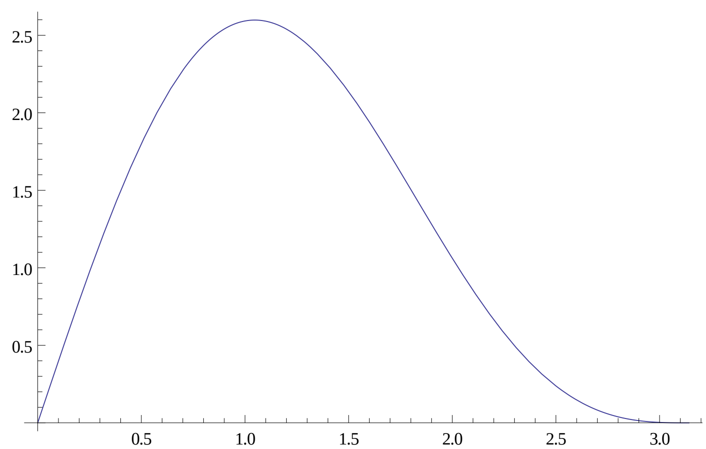
benützt. Nullsetzen der Ableitung $f'(x)$ liefert

$$\cos x = \frac{-1 \pm 3}{4},$$

also $\cos x = \frac{1}{2}$ oder $\cos x = -1$, und daher (in unserem Intervall $[0,\pi]$) $x = \frac{\pi}{3}$ oder $x = \pi$. Der Randpunkt $x = 0$ ist auch eine lokale Extremalstelle. Die Funktionswerte von f sind

$$f(0) = 0,\ f(\frac{\pi}{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2},\ f(\pi) = 0,$$

also ist $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ das globale Maximum. Diese Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f:



Siehe nächstes Blatt!

3. Sei

$$f\colon [0,6] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \; 2x^3 - 15x^2 + 24x.$$

Welche der folgenden Aussagen trifft zu?

√ (a) 1 und 4 sind lokale Extremalstellen.

(b) 11 ist das globale Maximum von f auf $[0,6]$.

√ (c) 6 ist eine globale Maximalstelle von f auf $[0,6]$.

√ (d) $f(x) \geq -16$ für alle $x \in [0,6]$.

Die Ableitung von f ist

$$f'(x) = 6x^2 - 30x + 24 = 6 \cdot (x^2 - 5x + 4) = 6 \cdot (x-1)(x-4).$$

Nullsetzen der Ableitung liefert

$$f'(x) = 6 \cdot (x-1)(x-4) = 0.$$

Daraus ergibt sich $x = 1$ oder $x = 4$. Da

$$f'(x) > 0 \;\text{ für }\; x \in (0,1)$$
$$f'(x) < 0 \;\text{ für }\; x \in (1,4)$$
$$f'(x) > 0 \;\text{ für }\; x \in (4,6),$$

ist $x = 1$ eine lokale Maximalstelle und $x = 4$ eine lokale Minimalstelle (d.h. 1 und 4 sind lokale Extremalstellen). Die Randpunkte $x = 0$ und $x = 6$ des Definitionsbereichs sind auch lokale Extremalstellen. Die Funktionswerte von f in diesen Punkte sind

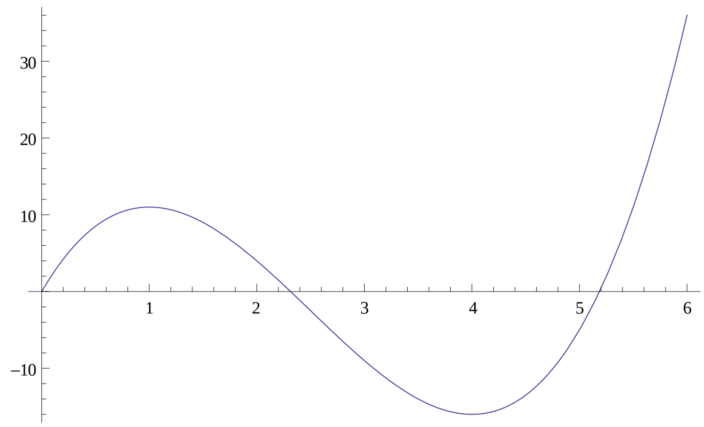
$$f(0) = 0,\; f(1) = 11,\; f(4) = -16,\; f(6) = 36.$$

Daher haben wir:

- $x = 6$ ist die globale Maximalstelle und 36 das globale Maximum;
- $x = 4$ ist die globale Minimalstelle und -16 das globale Minimum (und also $f(x) \geq -16$ für alle $x \in [0,6]$);
- $x = 1$ ist eine lokale Maximalstelle und 11 ein lokales Maximum;
- $x = 0$ ist eine lokale Minimalstelle und 0 ein lokales Minimum.

Diese Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f:

Bitte wenden!



4. Der Tangens hyperbolicus ist gegeben durch $\tanh(x) := \sinh(x)/\cosh(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Was ist die Ableitung des Tangens hyperbolicus?

(a) $1 + \tanh(x)^2$

(b) $\frac{1}{\tanh(x)^2}$

√ (c) $\frac{1}{\cosh(x)^2}$

√ (d) $1 - \tanh(x)^2$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{\cosh(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sinh(x) - \sinh(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cosh(x)}{\cosh(x)^2} = \frac{\cosh(x)\cosh(x) - \sinh(x)\sinh(x)}{\cosh(x)^2}$$
$$= 1 - \tanh(x)^2$$

5. Die Ableitung der Funktion $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^x$ ist ...

(a) $f'(x) = x^x$.

(b) $f'(x) = x^{x-1}$.

√ (c) $f'(x) = (1 + \ln x)x^x$.

(d) $f'(x) = x + x\ln x$.

Es gilt $f(x) = x^x = e^{x\ln x}$. Unter Anwendung der Ketten- und anschliessend der Produktregel erhalten wir
$$f'(x) = (x\ln x)' e^{x\ln x} = \left(\frac{x}{x} + \ln x\right) e^{x\ln x} = (1 + \ln x)x^x.$$

2. Berechne mit Hilfe der Bernoulli-de l'Hôpital-Regel die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{1+\sin(x)-\cos(x)}{\tan x}$;

b) $\lim_{x\to 1} \frac{\arctan \frac{1-x}{1+x}}{1-x}$;

c) $\lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{1}{\cos^2(x)} - \cos(x)\right)^2}{x\cos(x)-\sin(x)}$.

Lösung:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{1+\sin x-\cos x}{\tan x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x+\sin x}{1+\tan^2 x} = 1$

b) Man bemerke zunächst, dass $\lim_{t\to 0} \frac{\arctan t}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{1+t^2} = 1$. Somit haben wir also $\lim_{x\to 1} \frac{\arctan \frac{1-x}{1+x}}{1-x} = \lim_{x\to 1} \frac{\arctan \frac{1-x}{1+x}}{\frac{1-x}{1+x}} \frac{1}{1+x} = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

c)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{1}{\cos^2 x} - \cos x\right)^2}{x\cos x-\sin x}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{-2\left(\frac{1}{\cos^2 x} - \cos x\right)\left(\frac{2}{\cos^3 x} + 1\right)}{x}$$
$$= \lim_{x\to 0} -2\left(\left(\frac{2\sin x}{\cos^3 x} + \sin x\right)\left(\frac{2}{\cos^3 x} + 1\right) + \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \cos x\right)\left(\frac{6\sin x}{\cos^4 x}\right)\right) = 0.$$

3. **a)** Bestimme die Werte der Konstanten $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ so, dass

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto ax^2 + bx$$

im Punkt $(1, 2)$ ein globales Maximum hat.

b) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass $a < b$. Bestimme das Maximum der Funktion

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$$

auf dem Intervall $[a, b]$.

Lösung:

a) Es muss folgendes gelten:

$$\begin{aligned} f(1) &= a + b = 2 \\ f'(1) &= 2a + b = 0 \\ f''(1) &= 2a < 0 \end{aligned}$$

Aus den ersten beiden Gleichungen folgt $a = -2$ (< 0) und $b = 4$. Somit hat $f(x) = -2x^2 + 4$ ein globales Maximum in $(1, 2)$.

Bitte wenden!

b) Das Maximum auf dem Intervall $[a, b]$ wird entweder am Rand angenommen, also in a oder b, oder in einem kritischen Punkt (d.h. $f'(x) = 0$). Wir suchen also zuerst lokale Maxima der Funktion f auf der ganzen reellen Achse $\mathbb{R}$.

Man hat

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x-1)(x-2),$$

also sind $x_0 = 1, x_1 = 2$ die kritischen Punkte. Weiter ist

$$f''(x) = 12x - 18,$$

also hat f in x_0 ein lokales Maximum und in x_1 ein lokales Minimum. Ausserdem sieht man, dass f auf dem Intervall $(-\infty, 1)$ monoton wachsend, auf $(1, 2)$ monoton fallend, und auf $(1, \infty)$ monoton wachsend ist.

Der Wert von f an der Stelle x_0 ist $f(x_0) = f(1) = 0$. Man sucht weitere Punkte x mit $f(x) = f(x_0) = 0$. Durch Polynomdivision kriegt man

$$f(x) = (x-1)(2x^2 - 7x + 5) = 2(x-1)^2(x - \frac{5}{2}),$$

also ist $\frac{5}{2}$ die einzige andere Nullstelle von f.

Wir unterscheiden die folgenden Fälle:

(i) $b \leq 1$, dann gilt $\max = f(b)$

(ii) $1 < b \leq \frac{5}{2}$ und $a \leq 1$, in diesem Fall $\max = f(1)$

(iii) $1 < b \leq \frac{5}{2}$ und $a > 1$, hier gilt $\max = \max(f(a), f(b))$

(iv) $b > \frac{5}{2}$, dann gilt $\max = f(b)$

4. Beweise folgende Identitäten für alle $x \in \mathbb{R}$:

a) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

b) $\sinh(x + y) = \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y)$

Beweise die folgenden Identitäten für alle $x \in \mathbb{R}$, wo sie sinnvoll sind:

c) $2\cosh^2\left(\frac{x}{2}\right) = \cosh(x) + 1.$

d) $\text{Arcosh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$

e) $\text{Arsinh}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

f) $\text{Arcosh}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

Lösung:

Wir erinnern uns an die Definitionen: $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.

a) $\cosh^2 x = \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2 = \frac{1}{4}(e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x}) = \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x})$, und analog $\sinh^2 x = \frac{1}{4}(e^{2x} - 2 + e^{-2x})$, also folgt $\cosh^2 x - \sinh^2 x = \frac{1}{4}(2 + 2) = 1$.

b) $\sinh x \cdot \cosh y = \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})(e^y + e^{-y}) = \frac{1}{4}(e^{x+y} + e^{x-y} - e^{y-x} - e^{-(x+y)})$, also folgt $\sinh x \cdot \cosh y + \sinh y \cdot \cosh x = \frac{1}{4}(2e^{x+y} - 2e^{-(x+y)}) = \sinh(x + y)$.

c) $2\cosh^2\left(\frac{x}{2}\right) = 2\left(\frac{e^{x/2}+e^{-x/2}}{2}\right)^2 = 2\frac{e^x+2+e^{-x}}{4} = \cosh x + 1.$

d) Setze $y := \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \geq 1$. Dann gilt $2y - e^x = \frac{1}{e^x}$ und damit

$$2ye^x - (e^x)^2 = 1,$$

also $(e^x)^2 - 2ye^x + 1 = 0$. Es folgt $e^x = \frac{1}{2}(2y \pm \sqrt{4y^2-4}) = y \pm \sqrt{y^2-1}$, es gibt hier zwei Äste der Umkehrfunktion (da der $\cosh$ im Unterschied zum $\sinh$ nicht injektiv ist). Wir verwenden den Teil rechts im Bild, d. h. bei $x > 0$ und dort gilt $e^x > 1$, d.h. wir verwenden die Lösung mit dem Plus. Folglich erhalten wir $x = \ln(y + \sqrt{y^2-1})$, was die Umkehrfunktion des Cosinus hyperbolicus darstellt. Für den Teil $x < 0$ hätten wir die Lösung mit dem Minus bekommen.

e) Wir wissen aus der Vorlesung, dass $\operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ und $\log' x = \frac{1}{x}$. Also gilt gemäss der Kettenregel

$$\begin{aligned}\operatorname{arsinh}' x &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \left(x + \sqrt{x^2+1}\right)' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot (x^2+1)'\right) \\ &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.\end{aligned}$$

f) Ganz analog wie für arsinh'.

5. **a)** Es sei eine stetige, in (a, b) differenzierbare Funktion $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ gegeben. Zeige, dass f genau dann konstant ist, wenn $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$. (*Hinweis*: Verwende den Mittelwertsatz.)

b) Beweise mittels Teilaufgabe (a) die Relation

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

für alle $x \in [-1, 1]$.

c)* Wenn die Funktion $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ zwar *stetig, aber nicht differenzierbar ist*, gilt der Mittelwertsatz im Allgemeinen nicht. Gebe ein Beispiel für ein derartiges f an, so dass der Mittelwertsatz nicht gilt.

Lösung:

a) Wenn f konstant ist, dann ist natürlich $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$. Für die umgekehrte Implikation nehme man $x_1, x_2 \in [a, b]$, wobei o.B.d.A. $x_1 < x_2$. Die Einschränkung $f|_{(x_1,x_2)}$ ist differenzierbar. Der Mittelwertsatz garantiert die Existenz eines $\xi \in (x_1, x_2)$, sodass

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi) \cdot (x_2 - x_1)$$

ist, aber laut unserer Annahme ist $f'(\xi) = 0$ und deshalb ist $f(x_1) = f(x_2)$. Dies heisst, dass f konstant ist.

b) Man definiere

$$f : x \longmapsto \arcsin x + \arccos x,$$

mit $D(f) = [-1, 1]$. Die Funktion f ist stetig und in $(-1, 1)$ differenzierbar, mit

$$f'(x) = \arcsin' x + \arccos' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

für alle $x \in (-1, 1)$. Teilaufgabe (a) zeigt, dass f konstant ist. Somit ist für alle $x \in [-1, 1]$ z.B.

$$\arcsin x + \arccos x = f(x) = f(0) = \arcsin 0 + \arccos 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Bitte wenden!

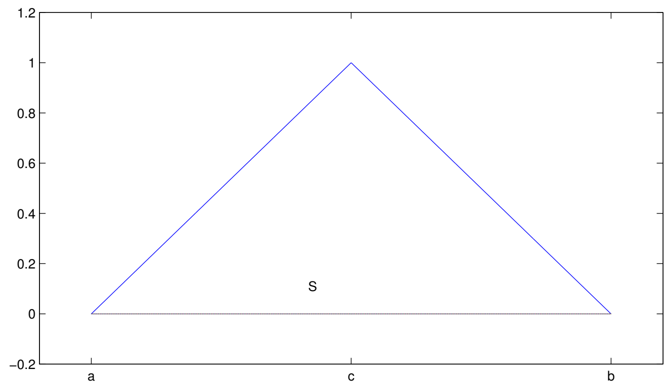


Abbildung 1: Die Funktion aus Aufgabe 5(c) (blau) und die zugehörige Sekante (schwarz).

c)* Wir wählen die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x - a, & x \le c, \\ b - x, & x > c, \end{cases}$$

wobei $c := \frac{a+b}{2}$ den Mittelpunkt des Intervalls $[a, b]$ bezeichnet. Diese Funktion ist auf dem ganzen Intervall $[a, b]$ stetig und lediglich an der Stelle c nicht differenzierbar, da sie dort einen Knick hat. Links vom Knick beträgt die Ableitung $+1$, rechts davon -1. Die Sekantensteigung lautet aber

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{0 - 0}{b - a} = 0 \neq \pm 1$$

und deshalb gilt der Mittelwertsatz nicht. Eine Skizze der Funktion und der Sekante ist auf dieser Seite am oberen Ende.