Lösung - Serie 9

1. MC-Aufgaben (Online-Abgabe)

1. Es sei f die Funktion $f(x) = xe^x + 7$. Welche der folgenden Funktionen sind Stammfunktionen von f?

(a) $g(x) = \frac{1}{2}x^2e^x + 7x$;

$\surd$ (b) $g(x) = xe^x - e^x + 7x$;

(c) $g(x) = (x-1)e^x$;

$\surd$ (d) $g(x) = (x-1)e^x + 7x + \pi^4$.

Durch partielle Integration erkennen wir, dass die Stammfunktionen von f Funktionen der Form $xe^x - e^x + 7x + C$ für eine Konstante C sind. Die Funktionen in (b) und (d) sind dieser Form, die Funktionen in (a) und (c) nicht.

2. Sei $n \geq 1$ eine ungerade natürliche Zahl. Jedes Polynom n-ten Grades mit reellen Koeffizienten hat mindestens eine reelle Nullstelle.

$\checkmark$ (a) Wahr

(b) Falsch

Der Fundamentalsatz der Algebra besagt, dass jedes Polynom mit Koeffizienten in $\mathbb{C}$ – also insbesondere auch mit Koeffizienten in $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ – genau n Nullstellen in $\mathbb{C}$ hat, wenn man ihre Vielfachheit berücksichtigt. Weiter wissen wir, dass für eine Nullstelle $z \in \mathbb{C}$ auch $\overline{z}$ eine Nullstelle ist, wenn das Polynom reelle Koeffizienten hat. Hätte das Polynom nun keine reelle Nullstelle, so hätte es eine gerade Anzahl an Nullstellen (mit Vielfachheit), was im Widerspruch zum Fundamentalsatz der Algebra steht. Also muss es mindestens eine reelle Nullstelle besitzen.

Kennt man sich etwas mit Stetigkeit und dem Grenzwertverhalten von Polynomen aus, so kann man die Existenz einer reellen Nullstelle auch wie folgt zeigen:

Sei $p(X) = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0$ ein solches Polynom, d.h. $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}, a_n \neq 0$. Weiter nehmen wir für den Moment an, dass $a_n > 0$ gilt. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
p(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \\
&= a_n x^n \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} x^{-1} + \ldots + \frac{a_0}{a_n} x^{-n}\right)}_{\to 1 \text{ für } x \to \pm\infty}.
\end{aligned}
$$

Da $a_n > 0$ gilt, strebt $a_n x^n$ gegen ∞ für $x \to \infty$ und gegen $-\infty$ für $x \to -\infty$. Das heisst, die reelle Funktion $p(x)$ ist für sehr kleines x kleiner als 0 und für sehr grosses x grösser als 0. Jedoch ist $p(x)$ stetig und nach dem Zwischenwertsatz muss es daher eine Nullstelle haben. Dies ist die gesuchte reelle Nullstelle.

Der Fall $a_n < 0$ lässt sich genauso behandeln.

Siehe nächstes Blatt!

3. Es sei f die Funktion mit $f(x) = \int\limits_3^x \sin(t)dt$. Wie lautet die Gleichung der Ableitung?

(a) $f'(x) = \cos(x) - \cos(3)$;

(b) $f'(x) = \sin(x) - \sin(3)$;

(c) $f'(x) = \cos(x)$;

√ (d) $f'(x) = \sin(x)$.

Sei f eine stetige Funktion und a eine Konstante. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung besagt, dass die Funktion F mit $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ eine Stammfunktion von f ist. Es gilt also $F'(x) = f(x)$. Setze hier f als die Funktion $f(x) = \sin x$ und $a = 3$.
Alternative: Berechne das Integral direkt durch:

$$\int_3^x \sin(t)dt = -\cos t\Big|_3^x = -\cos x + \cos 3.$$

Dann ist $f'(x) = (-\cos x + \cos 3)' = \sin x$.

4. Welches der folgenden Integrale stimmt im Allgemeinen nicht mit den anderen überein?

(a) $\int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$

Falsch. Dieses Integral stimmt mit $\int_a^b (f(t) - g(t))\,\mathrm{d}t$ überein, da nur die Integrationsvariable den Namen wechselt.

√ (b) $\int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}t$

Richtig, der Integrand ist konstant in Abhängigkeit von t.

(c) $\int_b^a (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x$

Falsch. Es gilt

$$\int_b^a (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x = -\int_a^b (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x.$$

(d) $\int_a^b (f(t) - g(t))\,\mathrm{d}t$

Falsch. Dieses Integral stimmt mit $\int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$ überein, da nur die Integrationsvariable den Namen wechselt.

5. Es sei $f(x) = (x-1)^4$ und $g(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x$. Die folgende Gleichungskette zeigt, dass $f(x) = g(x)$ gilt:

$$f(x) = (x-1)^4 = \int 4(x-1)^3\,dx = \int (4x^3 - 12x^2 + 12x - 4)\,dx = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x = g(x).$$

Allerdings ist $f(0) = 1 \neq 0 = g(0)$, also können f und g nicht identisch sein. Wo liegt der Fehler?

(a) Man darf in f und g nicht $x = 0$ einsetzen.

(b) Die binomische Formel wurde falsch angewendet.

$\surd$ (c) Die Integrationskonstante wurde nicht beachtet.

Die korrekte Antwort ist (c). Gleichungen für unbestimmte Integrale gelten immer nur bis auf eine Integrationskonstante; diese darf man nur solange unterschlagen, wie auf beiden Seiten einer Gleichung ein unbestimmtes Integral stehen bleibt. Die falsche Rechnung illustriert, was andernfalls passieren kann.

2. Berechnen Sie die folgenden Integrale.

a) $\int \left(x^2+1\right)^2 \, dx$

b) $\int \frac{x^2+15x+26}{2x^3+13x^2+24x+9} \, dx$

c) $\int \tan^2 x \, dx$

d) $\int x^2 \ln x \, dx$

e) $\int\limits_0^{\pi} x^2 \sin x \, dx$

f) $\int \frac{x}{\sin^2 x} \, dx$

Lösung:

a) $\int (x^2+1)^2 \, dx = \int (x^4+2x^2+1) \, dx = \int x^4 \, dx + 2 \int x^2 \, dx + \int 1 \, dx = \frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^3 + x + C.$

b) Mittels Partialbruchzerlegung berechnen wir:

$$\frac{x^2+15x+26}{2x^3+13x^2+24x+9} = \frac{-1}{x+3} + \frac{2}{(x+3)^2} + \frac{3}{2x+1}.$$

Wie man die Partialbruchzerlegung berechnet kann man sich auf folgender Webseite (`http://www.arndt-bruenner.de/mathe/scripts/partialbruchzerlegung.htm`) ansehen. Somit ergibt sich für das Integral

$$\int \frac{x^2+15x+26}{2x^3+13x^2+24x+9} \, dx = -\ln|x+3| - \frac{2}{x+3} + \frac{3}{2}\ln|2x+1| + C$$

wobei $C \in \mathbb{R}$.

c) $\int \tan^2(x) \, dx = \int \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} \, dx = \int \frac{1-\cos^2(x)}{\cos^2(x)} \, dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2(x)} - 1 \right) \, dx = \tan(x) - x + C.$

d) $\int x^2 \ln x \, dx = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 \, dx = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3 + C.$

e) $\int\limits_0^{\pi} x^2 \sin x \, dx = \left[-x^2 \cos x\right]_0^{\pi} + \int\limits_0^{\pi} 2x \cos x \, dx = \pi^2 + \left[2x \sin x\right]_0^{\pi} - \int\limits_0^{\pi} 2 \sin x \, dx = \pi^2 - 4.$

f) Wir benutzen partielle Integration: wir leiten x ab und integrieren $\frac{1}{\sin^2 x}$. Es gilt zunächst $\cot' x = -1 - \cot^2 x$ und damit

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} \, dx = \int (1+\cot^2 x) \, dx = -\cot x + C,$$

also

$$\int \frac{x}{\sin^2 x}\,dx = \int \underbrace{x}_{\downarrow} \cdot \overbrace{\tfrac{1}{\sin^2 x}}^{\uparrow}\,dx = x \cdot (-\cot x) - \int 1 \cdot (-\cot x)\,dx$$
$$= -x\cot x + \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = -x\cot x + \ln|\sin x| + C.$$

Der Pfeil $\downarrow$ bzw. $\uparrow$ bedeutet dabei ableiten bzw. integrieren.
Im letzten Schritt haben wir die *logarithmische Ableitung* benutzt: Es gilt immer $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)|$ unter Benützung der Kettenregel (sofern $f(x)$ nirgends Null ist).

3. Die Funktion $f(x) := \sqrt{x}$ soll im Intervall $[0,1]$ derart durch eine lineare Funktion $g(x) := x + c$ approximiert werden, dass das Integral

$$\int_0^1 \big(f(x) - g(x)\big)^2\,dx$$

minimiert wird. Bestimmen Sie den Wert von c, der diese Grösse minimiert.

Lösung: Das Integral berechnet sich zu

$$\begin{aligned}\int_0^1 (f(x)-g(x))^2\,dx &= \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x - c\right)^2\,dx \\ &= \int_0^1 \left(x - 2x^{3/2} - 2cx^{1/2} + x^2 + 2cx + c^2\right)\,dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{4}{5}x^{5/2} - \frac{4}{3}cx^{3/2} + \frac{x^3}{3} + cx^2 + c^2x\right]_{x=0}^{x=1} \\ &= c^2 - \frac{1}{3}c + \frac{1}{30}.\end{aligned}$$

Also müssen wir die Funktion $h(c) = c^2 - \frac{1}{3}c + \frac{1}{30}$ minimieren. Deren Ableitung ist $h'(c) = 2c - \frac{1}{3}$, und diese ist Null, wenn $c = \frac{1}{6}$. An dieser Stelle findet man tatsächlich ein Minimum der Funktion h, denn $h'' = 2 > 0$.

Insgesamt ist also $g(x) = x + \frac{1}{6}$ die beste lineare Approximation der Funktion $\sqrt{x}$ auf dem Intervall $[0,1]$ im *quadratischen Mittel*, und der Fehler ist $h(\frac{1}{6}) = \frac{1}{180}$.

4. Es sei f eine stetige Funktion definiert auf $\mathbb{R}$. Wir definieren

$$F\colon\ x \mapsto \int_0^{\sin x} f(t)\,dt\,.$$

Bestimmen Sie F'.

Lösung: Setze $G(x) := \int_0^x f(t)\,dt$. Dann gilt nach dem Hauptsatz der Infinitesimalrechnung $G'(x) = f(x)$. Die Funktion F ist definiert durch $F(x) = G(\sin x)$. Also gilt:

$$F'(x) = G'(\sin x)\cos x = f(\sin x)\cos x.$$

Siehe nächstes Blatt!

5. Ziel dieser Aufgabe ist es, eine Rekursionsformel für das Integral

$$I_n = \int_1^e \ln(x)^n \mathrm{d}x, \qquad n \geq 0$$

zu finden.

a) Berechnen Sie die ersten zwei Integrale I_0 und I_1.

b) Finden Sie eine allgemeine Formel für I_n. Benutzen Sie hierfür partielle Integration.

c) Verwenden Sie die gefundene Rekursionsformel von I_n um I_5 zu berechnen.

d)* Zeige, dass $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$. *Hinweis*: Es sei $\varepsilon > 0$. Benutze unter anderem

$$I_n = \int_1^{e-\varepsilon} \ln(x)^n \mathrm{d}x + \int_{e-\varepsilon}^{e} \ln(x)^n \mathrm{d}x$$

und $\ln(x) < 1$ für alle $x \in [1, e)$ um zu zeigen, dass $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n \leq \varepsilon$.

Lösung:

a) Es gilt

$$I_0 = \int_1^e \ln(x)^0 \mathrm{d}x = \int_1^e 1 \mathrm{d}x = e - 1$$

und mittels partieller integration

$$I_1 = \int_1^e \ln(x) \mathrm{d}x = \int_1^e 1 \cdot \ln(x) \mathrm{d}x = \big[x \ln(x)\big]_1^e - \int_1^e x \frac{1}{x} \mathrm{d}x = 1.$$

b) Es sei $n \geq 2$. Wir berechnen mit partieller Integration

$$I_n = \int_1^e \ln(x) \ln(x)^{n-1} \mathrm{d}x = \big[x(\ln(x) - 1)\ln(x)^{n-1}\big]_1^e - \int_1^e x(\ln(x)-1)(n-1)\ln(x)^{n-2}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

$$= 0 - (n-1)\int_1^e (\ln(x) - 1)\ln(x)^{n-2} \mathrm{d}x = (n-1)\left(I_{n-2} - I_{n-1}\right).$$

Also

$$I_n = (n-1)(I_{n-2} - I_{n-1})$$

für $n \geq 2$.

c) Durch sukzessives Einsetzen erhält man

$$I_5 = -44e + 120.$$

Bitte wenden!

d)* Mit dem Hinweis berechnen wir

$$I_n = \int_1^{e-\varepsilon} \ln(x)^n \mathrm{d}x + \int_{e-\varepsilon}^{e} \ln(x)^n \mathrm{d}x \leq \int_1^{e-\varepsilon} \ln(e-\varepsilon)^n \mathrm{d}x + \int_{e-\varepsilon}^{e} \ln(e)^n \mathrm{d}x.$$

Um die Abschätzung zu zeigen, haben wir benutzt, dass $\ln$ monoton steigend ist und deshalb $\ln(x)^n \leq \ln(e-\varepsilon)^n$ für alle $x \in [1, e-\varepsilon]$ und $\ln(x)^n \leq \ln(e)^n$ für alle $x \in [e-\varepsilon, e]$. Wir haben also

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} I_n &\leq \lim_{n\to+\infty} \int_1^{e-\varepsilon} \ln(e-\varepsilon)^n + \lim_{n\to+\infty} \int_{e-\varepsilon}^{e} \ln(e)^n \\
&= \lim_{n\to+\infty} \ln(e-\varepsilon)^n \int_1^{e-\varepsilon} 1\mathrm{d}x + \lim_{n\to+\infty} \ln(e)^n \int_{e-\varepsilon}^{e} 1\mathrm{d}x \\
&= \lim_{n\to+\infty} \ln(e-\varepsilon)^n (e-\varepsilon-1) + \lim_{n\to+\infty} 1^n \varepsilon = (e-\varepsilon-1)\cdot 0 + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Bei der obigen Rechnung haben wir benutzt, dass $\ln(e-\varepsilon) < 1$. Wir konnten also zeigen, dass

$$\lim_{n\to+\infty} I_n \leq \varepsilon$$

für alle $\varepsilon > 0$. Und deshalb folgt, dass

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = 0,$$

weil wir ja $\varepsilon > 0$ beliebig klein wählen können (und $I_n \geq 0$ für alle $n \geq 0$).

Bemerkung: (Zusammenhang zu fixpunktfreien Bijektionen, **nicht** prüfungsrelevant). Es gilt

$$I_n = (-1)^n (a_n e - n!)$$

für alle $n \geq 0$, wobei die Folge a_n die Rekursionsgleichung $a_n = (n-1)(a_{n-1} + a_{n-2}), n \geq 2$ mit $a_0 = 1, a_1 = 1$ erfüllt. (Dies lässt sich Nachrechnen).

Es lässt sich zeigen, dass a_n genau der Anzahl fixpunktfreier Bijektionen auf einer n-punktigen Menge entspricht. Fixpunktfrei heisst, dass es keinen Punkt gibt der auf sich selbst abgebildet wird. Mehr dazu kann man auf `https://de.wikipedia.org/wiki/Fixpunktfreie_Permutation` nachlesen.

Es gilt also

$$0 = \lim_{n\to+\infty} \frac{I_n}{n!} = \lim_{n\to+\infty} (-1)^n \left(\frac{a_n e}{n!} - 1\right)$$

und somit

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n!} = \frac{1}{e}.$$

Da eine n-punktige Menge genau $n!$ verschiedene Bijektionen zulässt, haben wir gezeigt, dass die Wahrscheinlichkeit zufällig eine fixpunktfreie Bijektion einer n-punktigen Menge auszuwählen für grosse n ungefähr $\frac{1}{e}$ beträgt.