

Schnellübung 3

Bemerkung: Diese Schnellübung wird am Mittwoch, dem 25. Oktober 2017, während der Übungsstunde gelöst.

1. Es sei die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$x \mapsto \sinh(2x) - 2 \sinh(x) \cosh(x).$$

a) Zeige $f''(x) - 4f(x) = 0$.

b) Zeige $f(x) + \frac{1}{2}f'(x) = 0$. Wieso folgt daraus, dass $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$?

c) Zeige $\cosh(2x) = \cosh(x)^2 + \sinh(x)^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

2. Welches ist eine Asymptote der Funktion $f(x) := -2x - \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ für $x \rightarrow +\infty$? Auswahlmöglichkeiten: $y(x) = 0$, $y(x) = -1$, $y(x) = -2x$ oder $y(x) = -2x - 1$.

3. Berechnen Sie, mit Hilfe der *Bernoulli-Hôpital*-Regel folgende Grenzwerte:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2-4x} - 1}{2x^2 - 8x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arctan(x) - \frac{\pi}{4}}{\tan(\pi x/4) - 1}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 5}{x \log^2(x)}$

4. Zeige $e^x \geq x + 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $\ln(x) \leq x - 1$ für alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$ mittels Methoden der Extremalwertrechnung.