Serie 5

Die erste Aufgabe ist eine Multiple-Choice-Aufgabe (MC-Aufgabe), die online gelöst wird. Bitte schicken Sie Ihre Lösungen zu den Online MC-Fragen bis *Mittwoch, 1.11.2017 um 08:00 Uhr* ab.

Bemerkung: Bei einigen MC-Aufgaben sind mehrere Antworten richtig. Eine MC-Aufgabe ist dann korrekt gelöst und mit einem Punkt bewertet, wenn Sie genau die richtigen Antworten angeben. Andernfalls wird sie mit Null bewertet. Falls Sie die Lösung nicht wissen, raten Sie nicht. So erhalten wir eine gute Rückmeldung über allfällige Unklarheiten. Viel Erfolg!

Abgabetermin für die schriftlichen Aufgaben: *Mittwoch, 1.11.2017* in der Vorlesung.

Homepage der Vorlesung: `https://metaphor.ethz.ch/x/2017/hs/401-0261-GXL/`

---

1. **MC-Aufgaben (Online-Abgabe)**

1. Durch zweifache Anwendung der Regel von Bernoulli-de l'Hôpital folgt

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2 + 1}{2x - 3} = \lim_{x\to 1} \frac{6x}{2} = 3.$$

Stimmt diese Überlegung?

(a) Ja.

(b) Nein, da das Zählerpolynom jeweils einen höheren Grad als das Nennerpolynom hat.

(c) Nein, da Zähler und Nenner des ersten Bruchs für $x \to 1$ nicht beide gegen 0 streben.

(d) Nein, da Zähler und Nenner des zweiten Bruchs für $x \to 1$ nicht beide gegen 0 streben.

(e) Nein, da die beiden ersten Brüche keine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktion beschreiben.

2. Bestimme das globale Maximum der Funktion $f\colon [0,\pi] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin(2x) + 2\sin(x)$.

(a) 2.61

(b) 1.73

(c) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

(d) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

3. Sei

$$\begin{aligned} f\colon [0,6] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto\ 2x^3 - 15x^2 + 24x. \end{aligned}$$

Welche der folgenden Aussagen trifft zu?

(a) 1 und 4 sind lokale Extremalstellen.

(b) 11 ist das globale Maximum von f auf $[0,6]$.

(c) 6 ist eine globale Maximalstelle von f auf $[0,6]$.

(d) $f(x) \geq -16$ für alle $x \in [0,6]$.

4. Der Tangens hyperbolicus ist gegeben durch $\tanh(x) := \sinh(x)/\cosh(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Was ist die Ableitung des Tangens hyperbolicus?

(a) $1 + \tanh(x)^2$

(b) $\frac{1}{\tanh(x)^2}$

(c) $\frac{1}{\cosh(x)^2}$

(d) $1 - \tanh(x)^2$

5. Die Ableitung der Funktion $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^x$ ist ...

(a) $f'(x) = x^x$.

(b) $f'(x) = x^{x-1}$.

(c) $f'(x) = (1 + \ln x)x^x$.

(d) $f'(x) = x + x\ln x$.

Siehe nächstes Blatt!

2. Berechne mit Hilfe der Bernoulli-de l'Hôpital-Regel die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1+\sin(x)-\cos(x)}{\tan x}$;

b) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\arctan \frac{1-x}{1+x}}{1-x}$;

c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\left(\frac{1}{\cos^2(x)}-\cos(x)\right)^2}{x\cos(x)-\sin(x)}$.

3. **a)** Bestimme die Werte der Konstanten $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ so, dass

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto ax^2+bx$$

im Punkt $(1,2)$ ein globales Maximum hat.

b) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass $a < b$. Bestimme das Maximum der Funktion

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$$

auf dem Intervall $[a, b]$.

4. Beweise folgende Identitäten für alle $x \in \mathbb{R}$:

a) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

b) $\sinh(x+y) = \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y)$

Beweise die folgenden Identitäten für alle $x \in \mathbb{R}$, wo sie sinnvoll sind:

c) $2\cosh^2\left(\dfrac{x}{2}\right) = \cosh(x) + 1$.

d) $\operatorname{Arcosh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$

e) $\operatorname{Arsinh}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

f) $\operatorname{Arcosh}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

Bitte wenden!

5. **a)** Es sei eine stetige, in (a, b) differenzierbare Funktion $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ gegeben. Zeige, dass f genau dann konstant ist, wenn $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$. (*Hinweis*: Verwende den Mittelwertsatz.)

b) Beweise mittels Teilaufgabe (a) die Relation

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

für alle $x \in [-1, 1]$.

c)* Wenn die Funktion $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ zwar *stetig, aber nicht differenzierbar ist*, gilt der Mittelwertsatz im Allgemeinen nicht. Gebe ein Beispiel für ein derartiges f an, so dass der Mittelwertsatz nicht gilt.