Serie 8

Die erste Aufgabe ist eine Multiple-Choice-Aufgabe (MC-Aufgabe), die online gelöst wird. Bitte schicken Sie Ihre Lösungen zu den Online MC-Fragen bis *Mittwoch, 22.11.2017 um 12:00 Uhr* ab.

Bemerkung: Bei einigen MC-Aufgaben sind mehrere Antworten richtig. Eine MC-Aufgabe ist dann korrekt gelöst und mit einem Punkt bewertet, wenn Sie genau die richtigen Antworten angeben. Andernfalls wird sie mit Null bewertet. Falls Sie die Lösung nicht wissen, raten Sie nicht. So erhalten wir eine gute Rückmeldung über allfällige Unklarheiten. Viel Erfolg!

Abgabetermin für die schriftlichen Aufgaben: *Mittwoch, 22.11.2017* in der Schnellübung.

Homepage der Vorlesung: `https://metaphor.ethz.ch/x/2017/hs/401-0261-GXL/`

---

1. MC-Aufgaben (Online-Abgabe)

1. Sei $z := 2\exp\left(\frac{\pi}{6}i\right) \cdot (5\sqrt{3} + b \cdot i)$. Für welches $b \in \mathbb{R}$ ist z eine reelle Zahl?

(a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

(b) $\sqrt{3}$

(c) $\frac{1}{5\sqrt{3}}$

(d) $5\sqrt{3}$

(e) Keines von diesen.

2. Sei $z := \sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$. Dann ist z^6 gleich

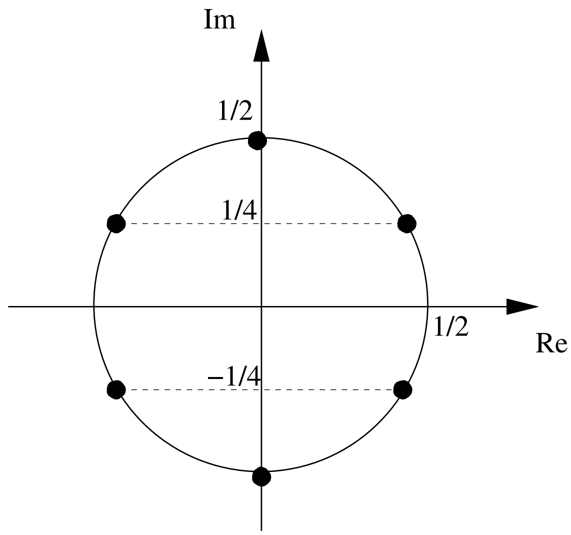
(a) $64(i\sqrt{2} - \sqrt{2})$.

(b) $-32(i\sqrt{2} - \sqrt{2})$.

(c) $64\exp(i\frac{3}{4}\pi)$.

(d) $64\exp(i\frac{3}{2}\pi)$.

3. Alle schwarzen Punkte in der unten stehenden Figur entsprechen Lösungen der Gleichung . . .



(a) $z^8 = \frac{1}{256}$

(b) $z^6 = \frac{1}{64}$

(c) $z^6 = \frac{1}{2}$

(d) $z^6 = -\frac{1}{64}$

4. Es seien $z, w \in \mathbb{C}$ komplexe Zahlen mit $z^4 = 1$ und $w^3 + i = 0$. Welche der folgenden Zahlen ist ein möglicher Wert der Summe $z + w$?

(a) 0

(b) $\frac{-i}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

(c) 1

(d) $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

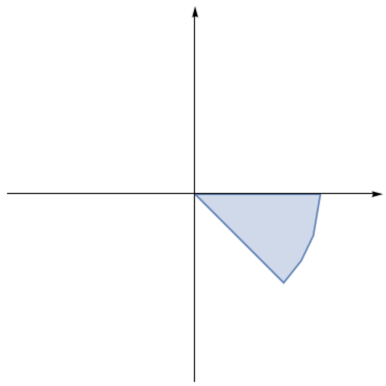
Siehe nächstes Blatt!

5. Es sei

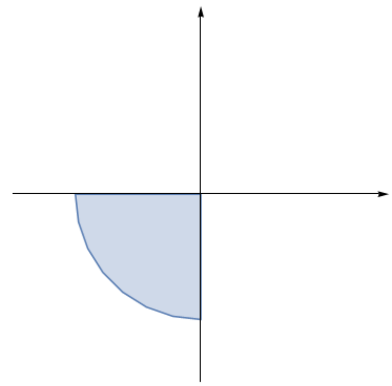
$$A := \left\{ re^{i\varphi} : r \in [0,1], \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right] \right\} \subset \mathbb{C}$$

und es sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $z \mapsto z^2$. Welche der folgenden Mengen entspricht $f(A)$?

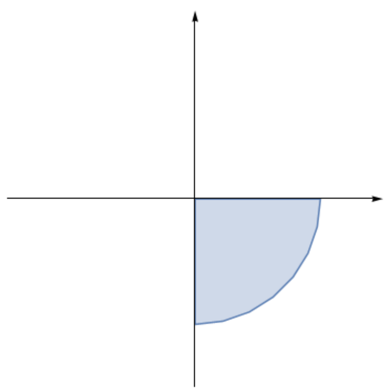
$a)$



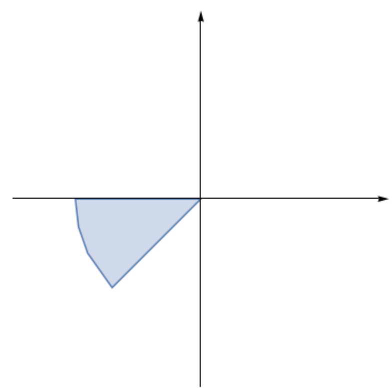
$b)$



$c)$



$d)$



(a) a)

(b) b)

(c) c)

(d) d)

2. Finde alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung

$$z^6 + (1-3i)z^3 - 2 - 2i = 0.$$

3. Bestimme alle komplexen Zahlen $u, v \in \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{u+v}.$$

Hinweis: Substituiere $z = \frac{v}{u}$.

4. Es sei das Gebiet

$$B = \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \,\middle|\, \mathrm{Im}\left(\frac{z+2}{iz}\right) > 0 \right\}$$

gegeben.

a) Skizziere das Gebiet B in der komplexen Ebene.

b) Das Polynom $z^3 + \frac{7}{2}z^2 + 7z + 6$ hat eine komplexe Nullstelle mit Realteil gleich -1. Bestimme alle Nullstellen dieses Polynoms. Wie lauten die Nullstellen in Polarform?

c) Welche dieser Nullstellen befinden sich in B?

5. Finde in der komplexen Ebene alle Lösungen der folgenden Gleichungen. Gebe die Lösungen jeweils auch in Polarform an.

a) $z^6 = -8$

b) $z^5 - 8(-1 - i\sqrt{3})z = 0$

c) $3z^3 - 12z^2 + pz + q = 0$, wobei $z_1 = 3 + i$ eine Lösung der Gleichung sein soll und p, q reelle Koeffizienten sind, welche noch bestimmt werden müssen.