Serie 9

Die erste Aufgabe ist eine Multiple-Choice-Aufgabe (MC-Aufgabe), die online gelöst wird. Bitte schicken Sie Ihre Lösungen zu den Online MC-Fragen bis *Mittwoch, 29.11.2017 um 12:00 Uhr* ab.

Bemerkung: Bei einigen MC-Aufgaben sind mehrere Antworten richtig. Eine MC-Aufgabe ist dann korrekt gelöst und mit einem Punkt bewertet, wenn Sie genau die richtigen Antworten angeben. Andernfalls wird sie mit Null bewertet. Falls Sie die Lösung nicht wissen, raten Sie nicht. So erhalten wir eine gute Rückmeldung über allfällige Unklarheiten. Viel Erfolg!

Abgabetermin für die schriftlichen Aufgaben: *Mittwoch, 29.11.2017* in der Vorlesung.

Homepage der Vorlesung: `https://metaphor.ethz.ch/x/2017/hs/401-0261-GXL/`

---

1. MC-Aufgaben (Online-Abgabe)

1. Es sei f die Funktion $f(x) = xe^x + 7$. Welche der folgenden Funktionen sind Stammfunktionen von f?

(a) $g(x) = \frac{1}{2}x^2e^x + 7x$;

(b) $g(x) = xe^x - e^x + 7x$;

(c) $g(x) = (x-1)e^x$;

(d) $g(x) = (x-1)e^x + 7x + \pi^4$.

2. Sei $n \geq 1$ eine ungerade natürliche Zahl. Jedes Polynom n-ten Grades mit reellen Koeffizienten hat mindestens eine reelle Nullstelle.

(a) Wahr

(b) Falsch

3. Es sei f die Funktion mit $f(x) = \int\limits_3^x \sin(t)dt$. Wie lautet die Gleichung der Ableitung?

(a) $f'(x) = \cos(x) - \cos(3)$;

(b) $f'(x) = \sin(x) - \sin(3)$;

(c) $f'(x) = \cos(x)$;

(d) $f'(x) = \sin(x)$.

4. Welches der folgenden Integrale stimmt im Allgemeinen nicht mit den anderen überein?

(a) $\int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$

(b) $\int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}t$

(c) $\int_b^a (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x$

(d) $\int_a^b (f(t) - g(t))\,\mathrm{d}t$

5. Es sei $f(x) = (x-1)^4$ und $g(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x$. Die folgende Gleichungskette zeigt, dass $f(x) = g(x)$ gilt:

$$f(x) = (x-1)^4 = \int 4(x-1)^3\,dx = \int (4x^3 - 12x^2 + 12x - 4)\,dx = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x = g(x).$$

Allerdings ist $f(0) = 1 \neq 0 = g(0)$, also können f und g nicht identisch sein. Wo liegt der Fehler?

(a) Man darf in f und g nicht $x = 0$ einsetzen.

(b) Die binomische Formel wurde falsch angewendet.

(c) Die Integrationskonstante wurde nicht beachtet.

Siehe nächstes Blatt!

2. Berechnen Sie die folgenden Integrale.

a) $\int \left(x^2+1\right)^2\, dx$

b) $\int \frac{x^2+15x+26}{2x^3+13x^2+24x+9}\, dx$

c) $\int \tan^2 x\, dx$

d) $\int x^2 \ln x\, dx$

e) $\int\limits_0^{\pi} x^2 \sin x\, dx$

f) $\int \frac{x}{\sin^2 x}\, dx$

3. Die Funktion $f(x) := \sqrt{x}$ soll im Intervall $[0,1]$ derart durch eine lineare Funktion $g(x) := x + c$ approximiert werden, dass das Integral

$$\int\limits_0^1 \big(f(x) - g(x)\big)^2\, dx$$

minimiert wird. Bestimmen Sie den Wert von c, der diese Grösse minimiert.

4. Es sei f eine stetige Funktion definiert auf $\mathbb{R}$. Wir definieren

$$F\colon\ x \mapsto \int\limits_0^{\sin x} f(t)\, dt\,.$$

Bestimmen Sie F'.

5. Ziel dieser Aufgabe ist es, eine Rekursionsformel für das Integral

$$I_n = \int\limits_1^e \ln(x)^n \mathrm{d}x, \qquad n \geq 0$$

zu finden.

a) Berechnen Sie die ersten zwei Integrale I_0 und I_1.

b) Finden Sie eine allgemeine Formel für I_n. Benutzen Sie hierfür partielle Integration.

c) Verwenden Sie die gefundene Rekursionsformel von I_n um I_5 zu berechnen.

d)* Zeige, dass $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$. *Hinweis*: Es sei $\varepsilon > 0$. Benutze unter anderem

$$I_n = \int_1^{e-\varepsilon} \ln(x)^n \mathrm{d}x + \int_{e-\varepsilon}^{e} \ln(x)^n \mathrm{d}x$$

und $\ln(x) < 1$ für alle $x \in [1, e)$ um zu zeigen, dass $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n \leq \varepsilon$.