Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Dr. A. Steiger

Sommer 2017

Prüfung in Analysis I/II

für die Studiengänge MAVT/MATL

Name: **Mustermann, Max**
Legi-Nr.: 00-000-000

Bitte lassen Sie die folgenden Felder frei! Sie werden von den Korrektoren benutzt.

	1. Korr.	2. Korr.	Punkte	Bemerkungen
Aufgabe 1				
Aufgabe 2				
Aufgabe 3				
Aufgabe 4				
Aufgabe 5				
Aufgabe 6				
Aufgabe 7				
SC Total				
MC Total				
Total				
Note				
Vollständig?			☐	

Allgemeines

- Legen Sie Ihre Legi vor Prüfungsbeginn offen auf den Tisch.
- Schalten Sie alle elektronischen Geräte (Handy, Smartwatch, etc.) aus und verstauen Sie diese in Ihrem Gepäck. Jegliche Kommunikationsmittel sind während der Prüfung verboten.
- Zugelassene Hilfsmittel: Eine Zusammenfassung der Vorlesung auf 10 A4 Seiten (5 Blätter); die Formelsammlung "Formeln, Tabellen, Begriffe"(dt/fr/it/en); ein Wörterbuch für fremdsprachige Studenten.
- Verwenden Sie dokumentenechte blaue oder schwarze Stifte für Ihre Antworten. Resultate in roter oder grüner Farbe sowie Bleistift können *nicht* gewertet werden.

Format der Prüfung

- Die Prüfung dauert 240 Minuten und beginnt um 8:30 Uhr.
- Die Prüfung besteht aus 9 Multiple Choice-Aufgaben (MC), 18 Single Choice-Aufgaben (SC) und 7 offenen Aufgaben. 7 der 18 SC-Aufgaben sind den offenen Aufgaben vorangestellt, da diese thematisch zusammengehören. Die MC- bzw. SC-Aufgaben beantworten Sie auf dem zugehörigen Antwortblatt, die offenen Aufgaben bearbeiten Sie schriftlich auf Papier.
- Jede MC-Aufgabe besteht aus drei Teilen, die jeweils mit *richtig* oder *falsch* beantwortet werden können. Im MC-Teil gibt jede korrekt angekreuzte Aussage 2 Punkte, jede falsch angekreuzte Aussage -2 Punkte und 0 Punkte wenn kein Kreuz gesetzt wurde. Die Summe der erzielten Punkte in MC-Teil wird auf 0 aufgerundet, sollte diese Zahl negativ sein.
- Jede SC-Aufgabe besitzt drei Antwortmöglichkeiten, von denen *genau eine* richtig ist. Eine richtige Antwort gibt 2 Punkte, eine falsche Antwort -1 Punkt, keine Antwort 0 Punkte. Die Summe der erzielten Punkte im SC-Teil wird auf 0 aufgerundet, sollte diese Zahl negativ sein.
- Jede offene Aufgabe gibt 22 Punkte. Resultate in diesem Teil müssen nachvollziehbar begründet werden, um die volle Punktzahl in einer Aufgabe zu erreichen. *Bitte bearbeiten Sie jede offene Aufgabe auf einem neuen Blatt Papier und beschriften Sie dieses mit Ihrer Legi-Nummer!*

Das Antwortblatt

- Das Antwortblatt ist bereits mit Ihrem Namen, Ihrer Leginummer und der Prüfungsgruppe beschriftet.
- Markieren Sie Ihre Lösungen der MC- und SC-Aufgaben deutlich auf dem Antwortblatt.
- Füllen Sie das Antwortblatt erst kurz vor Schluss der Prüfung aus um Korrekturen zu vermeiden. Falls nötig, korrigieren Sie falsche Antworten mit einer gut deckenden, weissen Korrekturflüssigkeit.
- **Wichtig:** Notieren Sie am Ende die **Prüfsumme** auf dem Antwortblatt. Diese ist gleich der Anzahl der **ausgemalten Kästchen**. Haben Sie jede Frage beantwortet, so ist die Prüfsumme $18 + 9 \cdot 3 = 45$.

Die Abgabe

- Sie können bis 15 Minuten vor Ende der Prüfung vorzeitig abgeben. Melden Sie sich dafür bei einer Aufsichtsperson. Verlassen Sie Ihren Platz erst, wenn Ihnen dies gestattet wird.
- Ab 15 Minuten vor dem Ende der Prüfung können Sie nicht mehr vorzeitig abgeben. Warten Sie, bis die Prüfung offiziell beendet wird und die Antwortblätter und Aufgabenblätter eingesammelt wurden.
- Nach Abgabe dürfen Sie erst dann aufstehen, wenn die Aufsichtspersonen Ihnen dies gestatten.

Offene Aufgaben. *Jeder der folgenden sieben offenen Aufgaben ist eine einzelne, thematisch verwandte Single Choice-Aufgabe vorangestellt. Beantworten Sie die Single Choice-Aufgabe auf dem Antwortblatt, die offene Aufgabe auf einem neuen Blatt Papier. Jede offene Aufgabe ist* 22 *Punkte wert.*

1. **Single Choice.** Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$-6x - 5y + 4 + (2y + 8 - 5x)y' = 0$$

ist implizit durch die Kurvenschar

$$(y - 3x + 4)(2y + x) = C \quad \text{für } C \in \mathbb{R}$$

gegeben. Welche Form hat die Lösungskurve für $C = 0$?

(a) Eine Hyperbel.

(b) Eine Ellipse.

(c) Zwei Geraden.

Offene Aufgabe. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$x\,(e^y - 3x)\,y' - 6xy + e^y + 1 = 0.$$

Es genügt, die Lösung implizit anzugeben.

2. **Single Choice.** Wir bezeichnen mit α_1 und α_2 die Nullstellen des charakteristischen Polynoms einer linearen Differentialgleichung zweiten Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Welche der folgenden Bedingungen impliziert, dass die allgemeine Lösung der Differentialgleichung beschränkt ist?

   (a) $\alpha_{1,2} = a \pm bi$ für $a < 0$ und $b > 0$.

   (b) $\alpha_{1,2} \in \mathbb{R}$.

   (c) $\alpha_{1,2} = \pm ib$ für $b > 0$.

   Offene Aufgabe.

   (a) Bestimmen Sie die Nullstellen und die Vielfachheiten der Nullstellen des charakteristischen Polynoms der Differentialgleichung

   $$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0.$$

   [Hinweis: $1 - 6 + 11 - 6 = 0$.*]*

   (b) Es seien $2 \pm 3i$ und -1 die Nullstellen des charakteristischen Polynoms einer homogenen Differentialgleichung dritten Ordnung mit konstanten reellen Koeffizienten. Was ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung?

   (c) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung

   $$y''' - 7y' + 6y = e^{-x}.$$

3. **Single Choice.** Es sei $\vec{r}(t)$ für $t \in \mathbb{R}$ eine Parametrisierung einer Kurve in der Ebene. Es bezeichne $k(t)$ die Krümmung von $\vec{r}(t)$ und $\vec{E}(t)$ die Parametrisierung der Evolute von $\vec{r}(t)$. Was können wir über $|k(t)|$ aussagen, wenn wir annehmen, dass die Distanz $|\vec{r}(t) - \vec{E}(t)|$ zwischen der Kurve und der Evolute monoton steigend in t ist?

   (a) $|k(t)|$ kann monoton steigend in t, monoton fallend in t, oder keines von beiden sein.

   (b) $|k(t)|$ ist monoton fallend in t.

   (c) $|k(t)|$ ist monoton steigend in t.

   Offene Aufgabe.

   (a) Bestimmen Sie die Krümmung der Kurve

   $$\vec{r}(t) = \left(t, e^{-t^2}\right)$$

   an der Stelle $t = 1$.

   (b) Bestimmen Sie einen Ausdruck für die Evolute der Kurve

   $$y = x^4.$$

   (c) Die Kurve K ist durch

   $$t \mapsto ((x(t), y(t)) = \left(\int_0^t \frac{\cos u}{1+u^2}\,du, \int_0^t \frac{\sin u}{1+u^2}\,du\right), \quad 0 \leq t \leq 1$$

   gegeben. Berechnen Sie die Bogenlänge von K.

4. **Single Choice.** Die Funktion f sei definiert durch

$$(x, y) \mapsto x^2 + y^2.$$

Wie lautet das totale Differential df von f?

(a) $x^2\,dx + y^2\,dy$

(b) $2x\,dx + 2y\,dy$

(c) $xy\,dx + xy\,dy$

Offene Aufgabe. Es bezeichne I das Intervall $(0, \frac{\pi}{2})$. Die Funktion $f\colon \mathbb{R}\times I \to \mathbb{R}$ werde durch

$$f(x, y) = x\tan(y)$$

für $x \in \mathbb{R}$ und $y \in I$ definiert.

(a) Bestimmen Sie im Punkt $\left(2, \frac{\pi}{4}, 2\right)$ die Tangentialebene an den Graphen $\Gamma(f)$ von f.

(b) Zeigen Sie, unter der Annahme, dass das totale Differential df eine Abschätzung für den absoluten Fehler Δf ist, dass

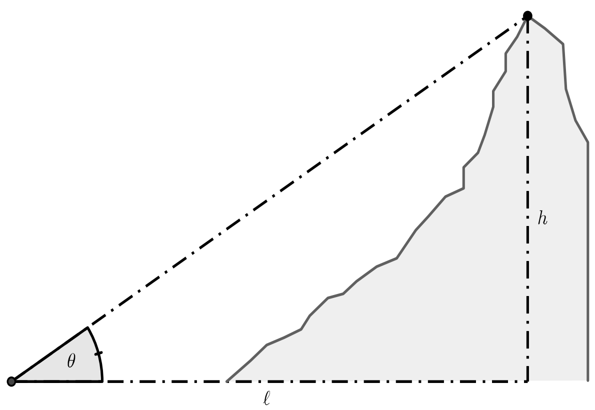
$$\frac{\Delta x}{x} + \frac{2\Delta y}{\sin(2y)}$$

eine Abschätzung für den relativen Fehler $\Delta f/f$ ist.

(c) Eine Methode um den Höhenunterschied zwischen dem aktuellen Standort und einer Bergspitze zu messen ist, den Winkel θ zur Bergspitze und die Entfernung l zum (gedachten) Fußpunkt des Berges zu messen (siehe Abbildung unten).

Dann berechnet sich der Höhenunterschied h als $h = f(l, \theta)$. Wir nehmen an, dass wir θ mit einer Genauigkeit von 1° und l mit einer Genauigkeit von 1% messen können. Verwenden Sie (b), um eine obere Schranke M für den relativen Fehler $\Delta h/h$ zu finden. Zeigen Sie weiter, dass gilt:

$$M \geq \frac{1}{100} + \frac{\pi}{90}.$$



5. **Single Choice.** Es sei $\vec{v}$ ein quellenfreies Vektorfeld. Dann gilt

   (a) Der Fluss $\Phi = \iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S}$ aus einer geschlossenen Oberfläche hinaus ist immer 0.

   (b) Die Arbeit $\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s}$ entlang eines geschlossenen Weges γ ist immer gleich 0.

   (c) Es existiert immer ein Potential $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, sodass $\vec{v} = (f_x, f_y, f_z)$.

   Offene Aufgabe. Es bezeichne S die Oberfläche gegeben durch

$$z = x^2 + y^2, \quad 0 \leq z \leq 1.$$

   Weiter sei $\vec{v}(x, y, z) = (-y^3, x^3, z^3)$ ein Vektorfeld. Berechnen Sie den Fluss

$$\int_S \operatorname{rot}(\vec{v}) \cdot d\vec{S}$$

   in negativer z-Richtung.

6. **Single Choice.** Es sei $\vec{v}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld gegeben durch

$$\vec{v}(x,y,z) = (\cos(y), \sin^2(x), z^2 - 6).$$

Wie gross ist der Fluss des Vektorfelds durch die Kreisscheibe

$$x^2 + y^2 \leq 1,\ z = 3$$

in negativer z-Richtung?

(a) -3π

(b) 0

(c) 3π

Offene Aufgabe. Es bezeichne

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 3\} \cup \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1\}$$

die Oberfläche eines halboffenen Zylinders. Weiter sei $\vec{v}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld gegeben durch $\vec{v}(x,y,z) = (\cos(y), \sin^2(x), z^2 - 6)$.

(a) Die Fläche S kann mit der Kreisscheibe aus der SC-Frage geschlossen werden. Berechnen Sie das Volumen des dadurch entstehenden Zylinders.

(b) Berechnen Sie $\operatorname{div} \vec{v}$.

(c) Berechnen Sie den Fluss

$$\Phi = \iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

aus S heraus.

7. **Single Choice.** Es seien A und B zwei disjunkte Körper in $\mathbb{R}^3$ und a bzw. b die Trägheitsmomente von A bzw. von B bezüglich der z-Achse. Was ist das Trägheitsmoment der Vereinigung $A \cup B$ bezüglich der z-Achse?

   (a) $\frac{a+b}{2}$.

   (b) $\sqrt{a^2+b^2}$.

   (c) $a+b$.

   Offene Aufgabe. Die Funktion $f\colon [0,\pi] \to (0,\infty)$ sei gegeben. Betrachten Sie die Region $R_f \subseteq \mathbb{R}^3$, definiert durch die Menge aller Punkte (x,y,z), die folgende Bedingung erfüllen:
$$0 \leq x^2+y^2 \leq f(z)\sin(z) \quad \text{für } 0 \leq z \leq \pi.$$

   (a) Es sei f_1 definiert durch $f_1\colon z \mapsto \cosh(\cos(z))$. Bestimmen Sie das Volumen von R_{f_1}.

   (b) Es sei f_2 definiert durch $f_2\colon z \mapsto e^z$. Wir nehmen an, dass R_{f_2} mit homogenem Material der Dichte 1 gefüllt ist. Bestimmen Sie das Trägheitsmoment von R_{f_2} bezüglich der z-Achse, welches durch
$$\iiint_{R_{f_2}} \left(x^2+y^2\right)\, dV$$
   gegeben ist.

Single Choice. *Die folgenden elf Aufgaben sind Single Choice-Aufgaben. Eine richtige Antwort ist 2 Punkte, eine falsche Antwort −1 Punkt und keine Antwort 0 Punkte wert. Ist die Gesamtpunktezahl über alle Single Choice-Aufgaben (inklusive den 7 Single Choice-Aufgaben, die den offenen Aufgaben vorangestellt sind) negativ, so wird sie auf 0 Punkte aufgerundet.*

8. Die Kurve K sei definiert durch

$$t \mapsto (x(t), y(t)) = \left(-e^t \sin t, e^t \cos t\right).$$

Bestimmen Sie die Bogenlänge von K zwischen $t = 0$ und $t = 1$.

(a) $e - 2$

(b) $\sqrt{2}e - \sqrt{2}$

(c) $2\sqrt{2}e$

9. Was ist der Konvergenzbereich der Potenzreihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} x^n$?

(a) $(-1/3, 1/3)$

(b) $\{0\}$

(c) $\mathbb{R}$

10. Was ist der Imaginärteil der komplexen Zahl $\exp(\exp(i\pi))$?

(a) 0

(b) $\exp(-1)$

(c) $\exp(\pi)$

11. Berechnen Sie (beispielsweise durch partielle Integration) das Integral $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x \cos(x)\, dx$

(a) 0

(b) 2

(c) $\frac{\pi}{2} - 1$

12. Die Richtungsableitung der Funktion $f(x, y, z) = xyz$ an der Stelle $(1, 1, 1)$ in Richtung des Vektors $(1, 0, 2)$ ist gleich

(a) $1/\sqrt{5}$

(b) $2/\sqrt{5}$

(c) $3/\sqrt{5}$

13. Welche der folgenden Kurven ist die Lösungskurve einer partiellen Lösung des Systems von Differentialgleichungen

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x - x^3 \end{cases}$$

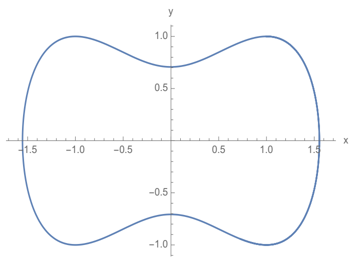
für $t \in [a, b]$ und $a, b \in \mathbb{R}$?

[Hinweis: Es ist nicht notwendig, das System zu lösen. Versuchen Sie stattdessen, falsche Antworten zu eliminieren.]

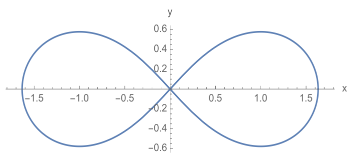
(a) Abbildung (a)

(b) Abbildung (b)

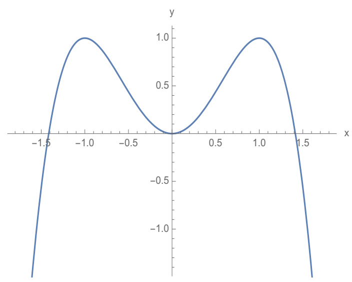
(c) Abbildung (c)



(a)



(b)



(c)

14. Berechnen Sie (beispielsweise durch Substitution) das Integral $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{1+x^2}\,dx$

(a) $\frac{7}{3}$

(b) $\frac{7}{6}$

(c) 1

15. Bestimmen sie, ob das uneigentliche Integral

$$I = \int_2^{\infty} \frac{1}{x(\log x)^2}\,dx$$

konvergiert. Falls I konvergiert, bestimmen Sie den Wert von I.

(a) I divergiert.

(b) $I = \dfrac{1}{\log 2}$

(c) $I = \dfrac{1}{(\log 2)^2}$

16. Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei durch

$$f(x) = \log\left(\frac{1}{\cos^2(x)+1}\right) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

gegeben. Weiter sei die Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

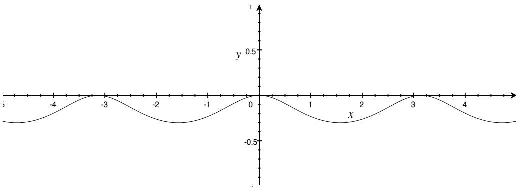
$$g(x) = \log\left(\cos^2(2x)+1\right) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

gegeben. Welcher der Graphen der Funktionen g_1, g_2 bzw. g_3 entspricht dem Graph der Funktion g in der nachstehenden Abbildung? (Abbildung (d) zeigt f)

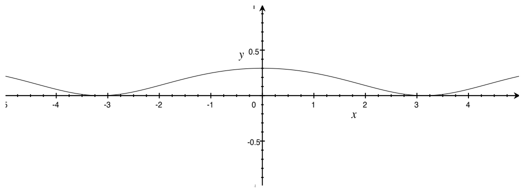
(a) g_1 (Abbildung (a))

(b) g_2 (Abbildung (b))

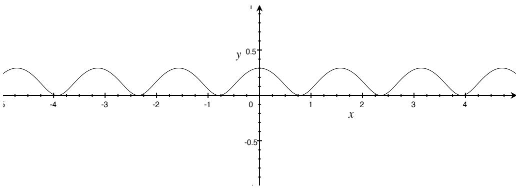
(c) g_3 (Abbildung (c))



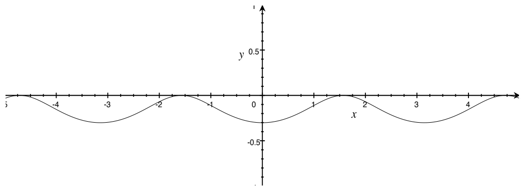
(a)



(b)



(c)



(d)

17. Die Fläche A sei berandet durch den Graph der Funktion $f(x) = \cos(x)$ auf dem Intervall $[0, \pi/2]$, die x-Achse, und die y-Achse. Was ist die y-Koordinate des Schwerpunkts von A?

[Hinweis: A hat die Fläche 1.*]*

(a) $\frac{1}{3}$

(b) $\frac{\pi}{4}$

(c) $\frac{\pi}{8}$

18. Bestimmen Sie den Wert von $\displaystyle\lim_{x\to e} \frac{1-\log(x)}{1-x/e}$

(a) Der Limes existiert nicht.

(b) 0

(c) 1

Multiple Choice. *Die folgenden neun Aufgaben sind Multiple Choice-Aufgaben. Jede der Multiple Choice-Aufgaben besteht aus drei Teilaufgaben, die Sie auf dem Antwortblatt jeweils mit wahr oder falsch beantworten können. Wird eine Teilaufgabe richtig beantwortet, gibt es* 2 *Punkte, bei falscher Beantwortung* -2 *Punkte und bei Nichtbeantwortung* 0 *Punkte. Ist die Gesamtpunktezahl über alle Multiple Choice-Aufgaben negativ, so wird sie auf* 0 *Punkte aufgerundet.*

19. Es sei $f\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion und es seien $x_0,\ y_0 \in [0,1]$. Bestimmen Sie für jede der folgenden Aussagen, ob diese wahr ist!

    (a) Ist (x_0, y_0) eine globale Maximalstelle von f, so gilt $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$.

    (b) Falls $f_x(x_0, y_0) = 0$ und $f_y(x_0, y_0) = 0$ beide gelten, so ist (x_0, y_0) eine lokale Maximal- oder eine lokale Minimalstelle.

    (c) Es seien $u\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ und $v\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen, sodass $f(x,y) = u(x)v(y)$ gilt. Ist x_0 eine Maximalstelle von u und y_0 eine Maximalstelle von v, so ist (x_0, y_0) eine Maximalstelle von f.

20. Es sei $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Polynom vom Grad 7 mit reellen Koeffizienten, einer doppelten Nullstelle bei 0 und einer doppelten Nullstelle bei 1. Bestimmen Sie für jede der folgenden Aussagen, ob sie wahr sein *kann*!

    (a) Das Polynom p hat zwei verschiedene Nullstellen $a + ib$ und $c + id$, sodass $b, d > 0$.

    (b) Das Polynom p hat eine doppelte Nullstelle der Form ib für $b > 0$.

    (c) Das Polynom p hat zwei komplex konjugierte Nullstellen.

21. Es seien $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen. Für welche Paare (u, v) existiert eine Funktion f, sodass $f_x = u$ und $f_y = v$ gilt?

    (a) $u = 2x\cos(y)$, $v = -x^2\sin(y)$.

    (b) $u = -x\sin(xy)$, $v = -y\cos(xy)$.

    (c) $u = (1 + xy)e^{xy}$, $v = x^2 e^{xy}$.

22. Betrachten Sie die Funktion $f\colon x \mapsto \sqrt{2x - 3}$, definiert auf $(3/2, \infty)$. Welche der folgenden linearen Funktionen sind Tangenten an f?

    (a) $x - 1$

    (b) $-\frac{x}{3} + 1$

    (c) $\frac{x}{5} - \frac{11}{5}$

23. Der Punkt $P \in \mathbb{R}^3$ sei durch $P = (1, 0, 2)$ in kartesischen Koordinaten gegeben. Welche der folgenden Mengen enthalten P?

    (a) In Zylinder-Koordinaten, die Menge aller Punkte (ρ, φ, z) mit $\rho \geq 0$, $\varphi = 0$ und $z = 2$.

    (b) In Zylinder-Koordinaten, die Menge aller Punkte (ρ, φ, z) mit $\rho = \sqrt{5}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ und $z = 2$.

    (c) In Kugel-Koordinaten, die Menge aller Punkte (r, φ, θ) mit $r = \sqrt{5}$, $\varphi = 0$ und $0 \leq \theta \leq \pi$.

24. Es seien f und g differenzierbare reelle Funktionen. Welche der folgenden Bedingungen implizieren, dass $f(x)$ eine Asymptote für $g(x)$ ist, wenn x gegen unendlich strebt?

    (a) $\lim_{x \to \infty} (f(x) - g(x)) = 0$.

    (b) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

    (c) $f' = g'$.

25. Es sei $\vec{v}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld. Bestimmen Sie für jede der folgenden Bildungen, ob diese zulässig ist!

    (a) $\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v}$

    (b) $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{v}$

    (c) $\operatorname{grad} \operatorname{grad} \vec{v}$

26. Bestimmen Sie für jede der folgenden Regionen, ob diese einfach zusammenhängend ist!

    (a) Ein halboffener Zylinder: $x^2 + y^2 = 1$, $0 \leq z \leq 1$ vereinigt mit $x^2 + y^2 \leq 1$, $z = 0$.

    (b) Der dreidimensionale euklidische Raum ohne einer Achse: $\mathbb{R}^3 \setminus \{x = 0, y = 0\}$.

    (c) Die Oberfläche eines Ellipsoids: $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$.

27. Es seien $F(x)$ bzw. $G(x)$ Stammfunktionen der Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bzw. $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Außerdem gelte $G(x) > 0$ für $x \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie für jede der folgenden Aussagen, ob sie wahr ist!

    (a) $F(x)^2$ ist eine Stammfunktion von $f(x)F(x)$.

    (b) $F(x) - G(x) + 1$ ist eine Stammfunktion von $f(x) - g(x)$.

    (c) $\log(G(x))$ ist eine Stammfunktion von $\frac{g(x)}{G(x)}$.