1. [6 Punkte] Gegeben sei die Sattelfläche

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2z = x^2 - y^2\}$$

sowie der Punkt $Q = (0, 2, 5)$. Bestimmen Sie die kleinste Zahl $r > 0$, sodass die Kugel mit Zentrum Q und Radius r die Fläche S berührt, und geben Sie sämtliche Berührpunkte an.

2. [6 Punkte] Berechnen Sie das Flächenträgheitsmoment

$$J_x = \int_S y^2 + z^2 \, dA$$

des Rotorblatts

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 4, \, x \geq 1, \, y \geq 0, \, 0 \leq z \leq 3\}$$

bei Rotation um die x-Achse.

3. [6 Punkte] Gegeben sei der Würfel

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z \in [0, 2]\},$$

und S bezeichne den Teil der Oberfläche von W, der oberhalb der Ebene $z = \frac{1}{2}(x + y)$ liegt. Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes

$$\vec{v}(x, y, z) = (x, z^2, y)$$

durch S aus dem Würfel heraus.

4. [6 Punkte] Der Kegelmantel $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ schneidet die Ebene $z = \frac{1}{2}(x + 3)$ in einem geschlossenen Weg γ, der so orientiert sei, dass er die z-Achse in positiver Richtung umlaufe. Berechnen Sie

(a) die Rotation des Vektorfeldes $\vec{v}(x, y, z) = (z^2, x, y)$ sowie

(b) die Arbeit, die $\vec{v}$ längs γ bei einem Umlauf leistet.

5. [6 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 3x + y + t \\ \dot{y} &= -4x - 2y \end{aligned}$$

für die Funktionen $t \mapsto x(t)$ und $t \mapsto y(t)$. (Hinweis: Durch Elimination von y lässt sich das System in eine inhomogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung für x überführen.)

6. [**6 Punkte**] Gegeben sei die Schar der Kurven $y = y(x) = x^c$ für $0 < x < 1$ und $c > 0$.

(a) [**2 Punkte**] Beschreiben Sie diese Kurvenschar durch eine Differentialgleichung der Gestalt $y' = f(x, y)$.

(b) [**2 Punkte**] Beschreiben Sie die Orthogonaltrajektorien der Schar durch eine Gleichung in der Form $F(x, y) = C$ für einen reellen Parameter C.

(c) [**2 Punkte**] Bestimmen Sie die Gleichung derjenigen Orthogonaltrajektorie, die für $x \to 1$ gegen den Punkt $(1, 0)$ strebt.

7. [**6 Punkte**] Bestimmen Sie die Taylorreihe der Funktion

$$f\colon x \mapsto \frac{4x - 5}{2x^2 - 5x + 3}$$

mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$, sowie ihren Konvergenzradius. (Hinweis: Partialbruchzerlegung.)

8. [**18 Punkte**] **Multiple-Choice-Aufgabe. Bei den folgenden Teilaufgaben (a)-(f) ist jeweils genau eine Antwort von vier Möglichkeiten richtig. Kreuzen Sie direkt auf dem Aufgabenblatt an. Falls Sie mehr als eine Option bei einer Teilaufgabe ankreuzen, gilt diese als unbeantwortet. Jede korrekt gelöste Teilaufgabe gibt drei Punkte, jede falsch gelöste Teilaufgabe minus einen Punkt und jede unbeantwortete Teilaufgabe null Punkte. Die Gesamtpunktzahl der Multiple-Choice-Aufgabe kann jedoch nie negativ sein; wir runden auf null Punkte auf.**

(a) [**3 Punkte**] $\int_0^\infty e^{-\sqrt{x}}\, dx = ?$

- ☐ 1
- ☐ 2
- ☐ 4
- ☐ ∞

(b) [**3 Punkte**] Das Polynom $P(z) = z^4 - 2z^3 + z - 2$ besitzt die komplexe Nullstelle $e^{i\pi/3}$. Wieviele der vier Nullstellen von $P(z)$ liegen auf dem Einheitskreis $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$?

- ☐ 1
- ☐ 2
- ☐ 3
- ☐ 4

(c) [**3 Punkte**] Eine homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten reellen Koeffizienten besitze die Lösung $x \mapsto e^x$ $(x \in \mathbb{R})$. Welche der folgenden Funktionen kann *nicht* als eine weitere Lösung derselben Gleichung auftreten?

- ☐ $x \mapsto \sin(x)$
- ☐ $x \mapsto \sinh(x)$
- ☐ $x \mapsto xe^x$
- ☐ $x \mapsto e^{2x}$

(d) [**3 Punkte**] Das Vektorfeld $\vec{v}$ sei auf $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 > 0\}$ definiert, und für $k = 0, 1$ bezeichne A_k die Arbeit, die das Vektorfeld längs des Kreises $s \mapsto (\cos(s), \sin(s), k)$ leistet $(s \in [0, 2\pi])$. Welche Bedingung stellt sicher, dass $A_0 = A_1$ ist?

- ☐ $\vec{v}$ ist quellenfrei
- ☐ $\vec{v}$ ist wirbelfrei
- ☐ $\vec{v}$ hat konstanten Betrag
- ☐ keine dieser drei Bedingungen

(e) [**3 Punkte**] Die Funktion $f(x, y) = 4x - x^2 + 3y - y^2$ auf dem Bereich $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 2 - x^2\}$ nimmt ihr Maximum in genau einem Punkt in D an. Wo liegt dieser Punkt?

- ☐ im Innern von D
- ☐ auf der Kante $\{y = 0,\ x^2 < 2\}$
- ☐ auf dem Parabelbogen $\{0 < y = 2 - x^2\}$
- ☐ in einem der Eckpunkte $(\pm\sqrt{2}, 0)$

(f) [**3 Punkte**] Ein Kreis mit Radius 1 rolle innen im Kreis mit Radius 3 und Zentrum im Ursprung ab, sodass sich der Berührpunkt im Gegenuhrzeigersinn bewegt. Welche der folgenden Parametrisierungen beschreibt die Bewegung eines Punktes des kleineren Kreises?

- ☐ $t \mapsto (3\cos(t) + \cos(3t), 3\sin(t) + \sin(3t))$
- ☐ $t \mapsto (2\cos(t) + \cos(3t), 2\sin(t) + \sin(3t))$
- ☐ $t \mapsto (2\cos(t) + \cos(2t), 2\sin(t) + \sin(2t))$
- ☐ $t \mapsto (2\cos(t) + \cos(2t), 2\sin(t) - \sin(2t))$

Viel Erfolg!