1. [6 Punkte] Gegeben sei die Sattelfläche

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2z = x^2 - y^2\}$$

sowie der Punkt $Q = (0, 2, 5)$. Bestimmen Sie die kleinste Zahl $r > 0$, sodass die Kugel mit Zentrum Q und Radius r die Fläche S berührt, und geben Sie sämtliche Berührpunkte an.

Lösung: Es sei $P = (x, y, z) \in S$ ein beliebiger Punkt der Sattelfläche. Dann ist das Quadrat der Entfernung von P zu Q gleich

$$\begin{aligned} \mathrm{dist}(P, Q)^2 &= x^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2 \\ &= 2y^2 - 4y + z^2 - 8z + 29 = 2(y-1)^2 + (z-4)^2 + 11 \geq 11, \end{aligned}$$

wobei wir $x^2 = y^2 + 2z$ substituiert haben. Folglich ist $\mathrm{dist}(P, Q) \geq \sqrt{11}$, und da für $P = (\pm 3, 1, 4)$ die Distanz tatsächlich gleich $\sqrt{11}$ ist, ist $r = \sqrt{11}$ und die beiden Berührpunkte sind $(3, 1, 4)$ und $(-3, 1, 4)$.

2. [6 Punkte] Berechnen Sie das Flächenträgheitsmoment

$$J_x = \int_S y^2 + z^2 \, dA$$

des Rotorblatts

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 4,\ x \geq 1,\ y \geq 0,\ 0 \leq z \leq 3\}$$

bei Rotation um die x-Achse.

Lösung: Es sei $B = [0, \pi/3] \times [0, 3]$ und $f\colon B \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch $(\rho, z) \mapsto (2\cos\rho, 2\sin\rho, z)$. Dann ist $S = f(B)$ und da

$$f_\rho(\rho, z) = (-2\sin\rho, 2\cos\rho, 0) \text{ und } \quad f_z(\rho, z) = (0, 0, 1)$$

gilt, ist $\mathrm{d}A = 2\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}z$. Also gilt

$$J_x = 2\int_0^3 \int_0^{\pi/3} 4\sin^2\rho + z^2 \,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}z = 24\int_0^{\pi/3} \sin^2\rho\,\mathrm{d}\rho + 6\pi = 10\pi - 3\sqrt{3}.$$

3. [6 Punkte] Gegeben sei der Würfel

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z \in [0, 2]\},$$

und S bezeichne den Teil der Oberfläche von W, der oberhalb der Ebene $z = \frac{1}{2}(x + y)$ liegt. Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes

$$\vec{v}(x, y, z) = (x, z^2, y)$$

durch S aus dem Würfel heraus.

Lösung: Es bezeichne T den Schnitt des Würfels W mit der Ebene $z = \frac{1}{2}(x+y)$ und V das Innere des Würfels oberhalb der Ebene $z = \frac{1}{2}(x+y)$. Dann ist $\partial W = S \cup T$ und aus dem Divergenzsatz folgt

$$\iiint_V (\nabla \cdot \vec{v})\, dV = \oiint_{\partial W} (\vec{v} \cdot \vec{n})\, dA = \iint_S (\vec{v} \cdot \vec{n})\, dA + \iint_T (\vec{v} \cdot \vec{n})\, dA,$$

wobei $\vec{n}$ jeweils den nach außen orientierten Normalvektor bezeichnet. Nun ist der erste Summand des letzten Ausdrucks gleich dem gesuchten Fluss; es genügt also, das Volumsintegral sowie den Fluss durch T zu berechnen. Es gilt $\nabla \cdot \vec{v} = 1$ und für den zu T nach außen orientierten Normalvektor $\vec{n} = (1, 1, -2)/\sqrt{6}$, woraus

$$\iiint_V (\nabla \cdot \vec{v})\, dV = \iiint_V 1\, dV = 4$$

und

$$\iint_T (\vec{v} \cdot \vec{n})\, dA = \frac{1}{\sqrt{6}} \iint_T (x - 2y + z^2)\, dA$$

folgen. Nun ist $dA = \sqrt{6}/2\, dx\, dy$, also

$$\frac{1}{\sqrt{6}} \iint_T (x - 2y + z^2)\, dA = \int_0^2 \int_0^2 \left(\frac{x}{2} - y + \frac{(x+y)^2}{8} \right) dx\, dy = \frac{1}{3}.$$

Insgesamt ist der gesuchte Fluss also gleich $4 - \frac{1}{3}$.

4. **[6 Punkte]** Der Kegelmantel $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ schneidet die Ebene $z = \frac{1}{2}(x+3)$ in einem geschlossenen Weg γ, der so orientiert sei, dass er die z-Achse in positiver Richtung umlaufe. Berechnen Sie

   (a) die Rotation des Vektorfeldes $\vec{v}(x, y, z) = (z^2, x, y)$ sowie

   (b) die Arbeit, die $\vec{v}$ längs γ bei einem Umlauf leistet.

Lösung: (a)[**1 Punkt**] Es ist

$$\operatorname{rot}(\vec{v}) = \nabla \times \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} z^2 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2z \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b)[**5 Punkte**] Es bezeichne S jenen Teil der Ebene $z = \frac{1}{2}(x+3)$, der innerhalb des geschlossenen Wegs γ liegt. Der Normalvektor zu S ist $\vec{n} = (-1, 0, 2)/\sqrt{5}$. Aus dem Satz von Stokes folgt nun

$$\iint_S \operatorname{rot}(\vec{v}) \cdot \vec{n}\, dA = \oint_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{r},$$

wobei die rechte Seite genau der gesuchten Arbeit entspricht. Der geschlossene Weg γ ist durch $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}(x+3)^2$ bestimmt, was sich als Ellipsengleichung $3(x-1)^2 + 4y^2 = 12$ umschreiben lässt. Wir können S folglich durch

$$S = \left\{ \left(x, y, \tfrac{1}{2}(x+3)\right) : 3(x-1)^2 + 4y^2 \leq 12 \right\}$$

parametrisieren. Für $\vec{v}(x,y) = \left(x, y, \frac{1}{2}(x+3)\right)$ gilt nun $\vec{v}_x(x,y) = (1,0,1/2)$ und $\vec{v}_y(x,y) = (0,1,0)$, also ist $dA = \frac{\sqrt{5}}{2}\,dx\,dy$. Aus Teil (a) folgt $\operatorname{rot}(\vec{v}) \cdot \vec{n} = 1/\sqrt{5}$. Somit ist

$$\iint_S \operatorname{rot}(\vec{v}) \cdot \vec{n}\, dA = \frac{1}{2} \iint_{3(x-1)^2+4y^2 \leq 12} 1\, dx\, dy.$$

Dies entspricht genau der halben Fläche der Ellipse $3(x-1)^2 + 4y^2 = 12$, welcher durch $\sqrt{3}\pi$ gegeben ist. Da aber dieses Integral genau der gesuchten Arbeit entspricht, ist diese gleich $\sqrt{3}\pi$.

5. [**6 Punkte**] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 3x + y + t \\ \dot{y} &= -4x - 2y \end{aligned}$$

für die Funktionen $t \mapsto x(t)$ und $t \mapsto y(t)$. (Hinweis: Durch Elimination von y lässt sich das System in eine inhomogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung für x überführen.)

Lösung: Wir eliminieren y schrittweise:

$$\ddot{x} = 3\dot{x} + \dot{y} + 1 = 3\dot{x} - 4x - 2y + 1 = 3\dot{x} - 4x - 2(\dot{x} - 3x - t) + 1 = \dot{x} + 2x + 2t + 1.$$

Dies ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung für x. Ihre homogene Lösung ist durch alle Linearkombinationen der Fundamentallösungen e^{-t} und e^{2t} gegeben. Da $x(t) = -t$ eine homogene Lösung ist, sind alle Lösungen dieser Differentialgleichung durch

$$x(t) = ae^{-t} + be^{2t} - t$$

für reelle Konstanten a und b gegeben. Die erste der beiden Gleichungen liefert

$$y(t) = -4ae^{-t} - be^{2t} + 2t - 1.$$

Da diese Ausdrücke für x und y auch der zweiten Gleichung genügen, sind dies tatsächlich alle Lösungen des Differentialgleichungssystems.

6. [**6 Punkte**] Gegeben sei die Schar der Kurven $y = y(x) = x^c$ für $0 < x < 1$ und $c > 0$.

(a) [**2 Punkte**] Beschreiben Sie diese Kurvenschar durch eine Differentialgleichung der Gestalt $y' = f(x,y)$.

(b) [**2 Punkte**] Beschreiben Sie die Orthogonaltrajektorien der Schar durch eine Gleichung in der Form $F(x,y) = C$ für einen reellen Parameter C.

(c) [**2 Punkte**] Bestimmen Sie die Gleichung derjenigen Orthogonaltrajektorie, die für $x \to 1$ gegen den Punkt $(1,0)$ strebt.

Lösung: (a) Es gilt $c = \log y / \log x$, wobei $\log(\cdot)$ den natürlichen Logarithmus bezeichnet. Da weiters $y' = cx^{c-1} = cyx^{-1}$ ist, folgt

$$y' = \frac{y \log y}{x \log x} = f(x,y).$$

(b) Die Orthogonaltrajektorien sind durch die Gleichung $-1/y' = f(x, y)$ gegeben, also

$$x \log x = -y' y \log y.$$

Partielle Integration liefert

$$\tfrac{1}{2}x^2 \log x - \tfrac{1}{4}x^2 = -\tfrac{1}{2}y^2 \log y + \tfrac{1}{4}y^2 + C',$$

also

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 2(x^2 \log x + y^2 \log y) = C.$$

(c) Da die Orthogonaltrajektorie für $x \to 1$ gegen $(1, 0)$ streben soll, muss $y \to 0$ gelten. Da $y^2 \log y \to 0$ für $y \to 0$, folgt $C = 1$.

7. [**6 Punkte**] Bestimmen Sie die Taylorreihe der Funktion

$$f : x \mapsto \frac{4x - 5}{2x^2 - 5x + 3}$$

mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$, sowie ihren Konvergenzradius. (Hinweis: Partialbruchzerlegung.)

Lösung: Durch Partialbruchzerlegung erhalten wir

$$\frac{4x - 5}{2x^2 - 5x + 3} = \frac{1}{x - 1} + \frac{2}{2x - 3}.$$

Die Taylorentwicklung um $x = 0$ von $1/(x - 1)$ ist für $x < 1$ durch $\sum_{n \geq 0} -x^n$ gegeben, die von $2/(2x - 3)$ um $x = 0$ ist für $x < 3/2$ durch

$$\frac{2}{2x - 3} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1 - 2x/3} = -\frac{2}{3} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{2}{3}\right)^n x^n = \sum_{n \geq 0} -\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} x^n$$

gegeben. Folglich ist die Taylorentwicklung des gesamten Terms um $x = 0$ durch

$$\frac{4x - 5}{2x^2 - 5x + 3} = \sum_{n \geq 0} -\left(1 + \left(\tfrac{2}{3}\right)^{n+1}\right) x^n$$

gegeben und der Konvergenzradius ist gleich dem Minimum der beiden Konvergenzradien 1 und 3/2, ist also gleich 1.

8. [**18 Punkte**] **Multiple-Choice-Aufgabe. Bei den folgenden Teilaufgaben (a)-(f) ist jeweils genau eine Antwort von vier Möglichkeiten richtig. Kreuzen Sie direkt auf dem Aufgabenblatt an. Falls Sie mehr als eine Option bei einer Teilaufgabe ankreuzen, gilt diese als unbeantwortet. Jede korrekt gelöste Teilaufgabe gibt drei Punkte, jede falsch gelöste Teilaufgabe minus einen Punkt und jede unbeantwortete Teilaufgabe null Punkte. Die Gesamtpunktzahl der Multiple-Choice-Aufgabe kann jedoch nie negativ sein; wir runden auf null Punkte auf.**

(a) [**3 Punkte**] $\int_0^\infty e^{-\sqrt{x}}\, dx = ?$

- ☐ 1
- ■ 2
- ☐ 4

☐ ∞

(b) [**3 Punkte**] Das Polynom $P(z) = z^4 - 2z^3 + z - 2$ besitzt die komplexe Nullstelle $e^{i\pi/3}$. Wieviele der vier Nullstellen von $P(z)$ liegen auf dem Einheitskreis $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$?

- ☐ 1
- ☐ 2
- ■ 3
- ☐ 4

(c) [**3 Punkte**] Eine homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten reellen Koeffizienten besitze die Lösung $x \mapsto e^x$ ($x \in \mathbb{R}$). Welche der folgenden Funktionen kann *nicht* als eine weitere Lösung derselben Gleichung auftreten?

- ■ $x \mapsto \sin(x)$
- ☐ $x \mapsto \sinh(x)$
- ☐ $x \mapsto xe^x$
- ☐ $x \mapsto e^{2x}$

(d) [**3 Punkte**] Das Vektorfeld $\vec{v}$ sei auf $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 > 0\}$ definiert, und für $k = 0, 1$ bezeichne A_k die Arbeit, die das Vektorfeld längs des Kreises $s \mapsto (\cos(s), \sin(s), k)$ leistet ($s \in [0, 2\pi]$). Welche Bedingung stellt sicher, dass $A_0 = A_1$ ist?

- ☐ $\vec{v}$ ist quellenfrei
- ■ $\vec{v}$ ist wirbelfrei
- ☐ $\vec{v}$ hat konstanten Betrag
- ☐ keine dieser drei Bedingungen

(e) [**3 Punkte**] Die Funktion $f(x, y) = 4x - x^2 + 3y - y^2$ auf dem Bereich $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 2 - x^2\}$ nimmt ihr Maximum in genau einem Punkt in D an. Wo liegt dieser Punkt?

- ☐ im Innern von D
- ☐ auf der Kante $\{y = 0,\ x^2 < 2\}$
- ■ auf dem Parabelbogen $\{0 < y = 2 - x^2\}$
- ☐ in einem der Eckpunkte $(\pm\sqrt{2}, 0)$

(f) [**3 Punkte**] Ein Kreis mit Radius 1 rolle innen im Kreis mit Radius 3 und Zentrum im Ursprung ab, sodass sich der Berührpunkt im Gegenuhrzeigersinn bewegt. Welche der folgenden Parametrisierungen beschreibt die Bewegung eines Punktes des kleineren Kreises?

- ☐ $t \mapsto (3\cos(t) + \cos(3t), 3\sin(t) + \sin(3t))$
- ☐ $t \mapsto (2\cos(t) + \cos(3t), 2\sin(t) + \sin(3t))$
- ☐ $t \mapsto (2\cos(t) + \cos(2t), 2\sin(t) + \sin(2t))$
- ■ $t \mapsto (2\cos(t) + \cos(2t), 2\sin(t) - \sin(2t))$