

Lösung - Serie 13

MC-Aufgaben (Online-Abgabe)

1. Wenn man zwei beliebig oft differenzierbare Funktionen addiert, dann werden ihre Taylorreihen an einem Punkt x_0

- ✓ (a) addiert.
- (b) addiert, aber man erhält die Taylorreihe an der Stelle $2x_0$.
- (c) addiert, aber man erhält die Taylorreihe an der Stelle x_0^2 .
- (d) es kann keine allgemein gültige Aussage getroffen werden.

Die Taylorreihe der Summe $f + g$ zweier Funktionen ist $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f+g)^{(k)}(x-x_0)}{k!}$. Wegen $(f + g)^{(k)}(x - x_0) = f^{(k)}(x - x_0) + g^{(k)}(x - x_0)$ ist die erste Antwort die richtige.

2. Der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k x^k$ ist

- (a) 0
- ✓ (b) $\frac{1}{2}$
- (c) 2
- (d) ∞

Nach dem Quotientenkriterium ist der Konvergenzradius $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2^k}{2^{k+1}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Also ist (b) richtig.

3. Es sei f die Funktion mit

$$f(x) = \frac{e^x}{x+1}.$$

Welches der folgende Polynome ist das zweite Taylor-Polynom $P_2(x)$ im Punkt $x_0 = 0$?

- ✓ (a) $1 + \frac{x^2}{2}$
- (b) $1 + x + \frac{x^2}{2}$
- (c) $1 + x + x^2$
- (d) $1 + x^2$

Nach Definition ist mit $x_0 = 0$ das zweite Taylor-Polynom

$$T_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2.$$

Es ist $f(0) = \frac{e^0}{1} = 1$, sodass alle vier Polynome möglich sind. Es ist mit Quotientenregel

$$f'(x) = \frac{e^x(x+1) - e^x}{(x+1)^2} = \frac{e^x x}{(x+1)^2},$$

und damit $f'(0) = 0$ und es bleiben noch zwei Kandidaten. Mit Kettenregel und wieder mit Quotientenregel gilt

$$f''(x) = \frac{(e^x x)'(x+1)^2 - e^x x 2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{(e^x + xe^x)(x+1)^2 - e^x x 2(x+1)}{(x+1)^4}.$$

Setzen wir direkt 0 ein, so ist $f''(0) = 1$. Also $T_2(x) = 1 + \frac{x^2}{2}$.

Siehe nächstes Blatt!

4. Die Entwicklung der Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ als Potenzreihe um $x_0 = 1$ lautet

(a) $\sum_{k=0}^{\infty} (x-1)^k$

(b) $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$

✓ (c) $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (x-1)^k$

(d) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (x-1)^{k-1}$

Dank der geometrischen Reihe haben wir für $|x-1| < 1$

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} &= \frac{1}{1-(1-x)} = 1 + (1-x) + (1-x)^2 + (1-x)^3 + \dots = \\ &= 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (x-1)^k. \end{aligned}$$

Die Reihe konvergiert für $|x-1| < 1$; ihr Konvergenzintervall ist also $(0; 2)$.

5. In welchem Bereich konvergiert die Potenzreihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3 (-1)^{k+1} (2x-1)^{2k}}{5^{2k}}$?

(a) $(-1, 2)$

(b) $(-4, 5)$

(c) $(-2, 2)$

✓ (d) $(-2, 3)$

Es sei $z = (2x-1)^2$. Aus dem Quotientenkriterium folgt, dass der Konvergenzradius bezüglich z gleich

$$\left| \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^3 (-1)^{k+1} 5^{2k+2}}{(k+1)^3 (-1)^{k+2} 5^{2k}} \right| = \left| \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{25k^3}{(k+1)^3} \right| = 25$$

ist. Folglich konvergiert die Potenzreihe genau dann, wenn $z = (2x-1)^2 < 25$ ist, also wenn $-2 < x < 3$ gilt. Um den Beweis abzuschließen reicht es zu zeigen, dass die Potenzreihe für $x \in \{-2, 3\}$ nicht konvergiert. Dies folgt aber daraus, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} k^3$ divergiert.

Bitte wenden!

Übungsaufgaben

6. Berechne die Taylorreihe um $x_0 = 0$ der folgenden Funktionen f .

a) $f(x) = \sinh(x)$;

b) $f(x) = x^2 \ln(1 + x^4)$.

Lösung:

a) Wir wissen

$$(\sinh(x))' = \cosh(x), \quad (\cosh(x))' = \sinh(x)$$

also gilt $(\sinh(x))'' = \sinh(x)$. Allgemeiner gilt $(\sinh(x))^{(2k)} = \sinh(x)$ für alle $k \geq 0$ und $(\sinh(x))^{(2k-1)} = \cosh(x)$ für alle $k \geq 1$.

Weil $\sinh(0) = 0$ und $\cosh(0) = 1$, überleben in der Taylorreihe von $\sinh(x)$ nur die ungeraden Terme. Tatsächlich gilt

$$\sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \dots$$

b) Die Taylorreihe von $\ln(1+x)$ bzgl. des Punkts $x=0$ lautet

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{k+1}}{k+1}.$$

Daraus folgt

$$\ln(1+x^4) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{4k+4}}{k+1}.$$

Für $x^2 \ln(1+x^4)$ ergibt sich also die Reihenentwicklung

$$x^2 \ln(1+x^4) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{4k+6}.$$

7. Bestimme die Taylorreihe um $x_0 = 0$ der Funktion

$$x \mapsto \int_0^x \frac{1 - e^{-t^2}}{t^2} dt.$$

Lösung:

Wegen $e^y = 1 + \frac{y}{1!} + \frac{y^2}{2!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}$ für alle $y \in \mathbb{R}$ gilt $e^{-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t^2)^n}{n!}$. Es folgt

$$\begin{aligned} \frac{1 - e^{-t^2}}{t^2} &= \frac{1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t^2)^n}{n!}}{t^2} = \frac{1 - \left(1 - t^2 + \frac{t^4}{2} - \frac{t^6}{6} + \dots\right)}{t^2} \\ &= 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{6} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} t^{2(n-1)}}{n!}. \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

Gliedweise Integration liefert

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{1 - e^{-t^2}}{t^2} dt &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!} \int_0^x t^{2(n-1)} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!} \left(\frac{x^{2n-1}}{2n-1} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)n!} x^{2n-1}. \end{aligned}$$

8. Bestimme die Koeffizienten c_k der Reihenentwicklung

$$e^x \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k.$$

Hinweis: Man setze $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$ ein, multipliziere aus und verwende die Exponentialreihe.

Lösung:

Mit $\cos x = \operatorname{Re} e^{ix}$ (für $x \in \mathbb{R}$) erhält man

$$\begin{aligned} e^x \cos x &= e^x \operatorname{Re} e^{ix} = \operatorname{Re} e^{(1+i)x} = \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1+i)^k}{k!} x^k \\ &= \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{2} e^{i\pi/4})^k}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{k/2}}{k!} \operatorname{Re}(e^{ik\pi/4}) x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{2^{k/2}}{k!} \cos(k\pi/4)}_{= c_k} x^k. \end{aligned}$$

Man beachte noch

$$\cos(k\pi/4) = \begin{cases} 1 & k \equiv 0 \pmod{8} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & k \equiv 1, 7 \pmod{8} \\ 0 & k \equiv 2, 6 \pmod{8} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & k \equiv 3, 5 \pmod{8} \\ -1 & k \equiv 4 \pmod{8} \end{cases}$$

Also:

$$c_k = \frac{1}{k!} \cdot \begin{cases} 2^{k/2} & k \equiv 0 \pmod{8} \\ 2^{(k-1)/2} & k \equiv 1, 7 \pmod{8} \\ 0 & k \equiv 2, 6 \pmod{8} \\ -2^{(k-1)/2} & k \equiv 3, 5 \pmod{8} \\ -2^{k/2} & k \equiv 4 \pmod{8}. \end{cases}$$

9. Entwickle die Funktion

$$f(x) = \frac{2}{1 - x + x^2 - x^3}$$

in eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ und bestimme deren Konvergenzradius.

Hinweis: Führe zunächst eine Partialbruchzerlegung von $f(x)$ durch.

Lösung: Wir stellen fest, dass wir den Nenner der gegebenen Funktion faktorisieren können als

$$1 - x + x^2 - x^3 = (1 - x)(1 + x^2).$$

Bitte wenden!

Wir machen daher für die Partialbruchzerlegung den Ansatz

$$f(x) = \frac{2}{(1-x)(1+x^2)} = \frac{A}{1-x} + \frac{Bx+C}{1+x^2}.$$

Multiplikation mit dem Hauptnenner und Sortieren nach Potenzen von x liefert

$$2 = \underbrace{(A-B)}_{\stackrel{!}{=}0} x^2 + \underbrace{(B-C)}_{\stackrel{!}{=}0} x + \underbrace{(A+C)}_{\stackrel{!}{=}2}.$$

Durch einen Koeffizientenvergleich zwischen linker und rechter Seite finden wir $A = B = C = 1$. Die gesuchte Partialbruchzerlegung lautet daher

$$f(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{1+x}{1+x^2}.$$

Die geometrische Reihe liefert

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots = (1+x)(1+x^2+x^4+x^6+\dots) \\ \frac{1}{1+x^2} &= \frac{1}{1-(-x^2)} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots \end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)(1+x^2+x^4+x^6+\dots) + (1+x)(1-x^2+x^4-x^6+\dots) \\ &= (1+x)(2+2x^4+2x^8+2x^{12}+\dots) \\ &= (1+x) \sum_{k=0}^{\infty} 2x^{4k} = \sum_{k=0}^{\infty} (2x^{4k} + 2x^{4k+1}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \end{aligned}$$

mit

$$a_n = \begin{cases} 2 & \text{für } n = 4k \text{ und } n = 4k + 1, k \in \mathbb{Z}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Konvergenzradius der Potenzreihendarstellung von $f(x)$ ist identisch mit dem Konvergenzradius der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} 2x^{4k} = \sum_{k=0}^{\infty} 2(x^4)^k$ im Zwischenergebnis. (Da eine Potenzreihe innerhalb ihres Konvergenzkreises absolut konvergiert, hat der Vorfaktor $(1+x)$ keinen Einfluss.) Um den Konvergenzradius letzterer Reihe zu bestimmen, substituieren wir $x^4 =: y$ und erhalten damit die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} 2y^k$, deren Konvergenzradius offensichtlich 1 beträgt. Die Potenzreihe für $f(x)$ konvergiert also, falls $|x^4| < 1 \Leftrightarrow |x| < 1$. Ihr Konvergenzradius beträgt demnach ebenfalls 1.

Siehe nächstes Blatt!

10. Berechne für die folgenden Potenzreihen den Konvergenzbereich $(-\rho, \rho)$.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n;$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{5^{n^2} n^n} x^n;$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{n} x^{2n};$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{\sqrt{n}} (x+3)^n.$

Lösung:

a) Wir benutzen die Definition des Konvergenzradius

$$\begin{aligned} \rho &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n!}{n^n} / \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n!}{n^n} / \frac{n!}{(n+1)^n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e. \end{aligned}$$

Also ist der Konvergenzbereich gegeben durch $(-e, e)$.

b) Wir setzen die Koeffizienten $a_n = \frac{(-1)^n n!}{5^{n^2} n^n}$ in die Formel für den Konvergenzradius ein und

$$\begin{aligned} \rho &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(-1)^n n!}{5^{n^2} n^n}}{\frac{(-1)^{n+1} (n+1)!}{5^{(n+1)^2} (n+1)^{n+1}}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n!}{n^n}}{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}} \cdot \frac{5^{(n+1)^2}}{5^{n^2}} \\ &= e \lim_{n \rightarrow \infty} 5^{n^2 + 2n + 1 - n^2} = \infty. \end{aligned}$$

Die Potenzreihe besitzt demnach den Konvergenzradius ∞ , konvergiert also für alle $x \in \mathbb{R}$.

c) Die Formel für den Konvergenzradius lässt sich hier leider nicht direkt anwenden, da alle ungeraden Koeffizienten der Potenzreihe sämtlich Null sind.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{n} x^{2n} &= 9x^2 + \frac{9^2}{2} x^4 + \dots \\ &= 0 \cdot x + 9x^2 + 0 \cdot x^3 + \frac{9^2}{2} x^4 + 0 \cdot x^5 + \dots \end{aligned}$$

Wir betrachten daher statt $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{n} x^{2n}$ zunächst die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{n} y^n$. Aus letzterer erhält man die ursprüngliche Potenzreihe zurück, indem man $y := x^2$ einsetzt. Die Koeffizienten der neuen Potenzreihe lauten $a_n = \frac{9^n}{n}$. Damit erhalten wir für deren Konvergenzradius

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9^n}{9^{n+1}} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{1}{9} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{1} = \frac{1}{9}.$$

Die Ersatzreihe konvergiert also für $|y| < \frac{1}{9}$. Wegen des Zusammenhangs $y = x^2$ ist dies genau dann der Fall, wenn $|x| < \frac{1}{3}$. Also ist der Konvergenzbereich gegeben durch $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

Bitte wenden!

d) Der Konvergenzradius beträgt

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{n+1}}{2^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{n+1}{n}} = \frac{1}{2}.$$

Da wir um den Punkt $x_0 = 3$ entwickeln konvergiert die Potenzreihe also sicher für

$$x \in (-3 - 1/2, -3 + 1/2) = \left(-\frac{7}{2}, -\frac{5}{2}\right)$$