

## Schnellübung 3

**Bemerkung:** Diese Schnellübung wird am Mittwoch, dem 25. Oktober 2017, während der Übungsstunde gelöst.

1. Es sei die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$x \mapsto \sinh(2x) - 2 \sinh(x) \cosh(x).$$

a) Zeige  $f''(x) - 4f(x) = 0$ .

b) Zeige  $f(x) + \frac{1}{2}f'(x) = 0$ . Wieso folgt daraus, dass  $f(x) = 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ ?

c) Zeige  $\cosh(2x) = \cosh(x)^2 + \sinh(x)^2$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

2. Welches ist eine Asymptote der Funktion  $f(x) := -2x - \frac{1}{\sqrt{1+x}}$  für  $x \rightarrow +\infty$ ? Auswahlmöglichkeiten:  $y(x) = 0$ ,  $y(x) = -1$ ,  $y(x) = -2x$  oder  $y(x) = -2x - 1$ .

3. Berechnen Sie, mit Hilfe der *Bernoulli-Hôpital*-Regel folgende Grenzwerte:

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2-4x} - 1}{2x^2 - 8x}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arctan(x) - \frac{\pi}{4}}{\tan(\pi x/4) - 1}$

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 5}{x \log^2(x)}$

4. Zeige  $e^x \geq x + 1$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  und  $\ln(x) \leq x - 1$  für alle  $x \in \mathbb{R}_{>0}$  mittels Methoden der Extremalwertrechnung.