D-MAVT/D-MATL | Analysis I | HS 2017
Dr. Andreas Steiger

Serie 6

Die erste Aufgabe ist eine Multiple-Choice-Aufgabe (MC-Aufgabe), die online gelöst wird. Bitte schicken Sie Ihre Lösungen zu den Online MC-Fragen bis *Mittwoch, 8.11.2017 um 08:00 Uhr* ab.

Bemerkung: Bei einigen MC-Aufgaben sind mehrere Antworten richtig. Eine MC-Aufgabe ist dann korrekt gelöst und mit einem Punkt bewertet, wenn Sie genau die richtigen Antworten angeben. Andernfalls wird sie mit Null bewertet. Falls Sie die Lösung nicht wissen, raten Sie nicht. So erhalten wir eine gute Rückmeldung über allfällige Unklarheiten. Viel Erfolg!

Abgabetermin für die schriftlichen Aufgaben: *Mittwoch, 8.11.2017* in der Schnellübung.

Homepage der Vorlesung: `https://metaphor.ethz.ch/x/2017/hs/401-0261-GXL/`

---

1. MC-Aufgaben (Online-Abgabe)

1. Für alle ganzen Zahlen $n \geq 1$ gilt ...

(a) $e^{-1/x} = o(x^n)$ für $x \to 0^+$

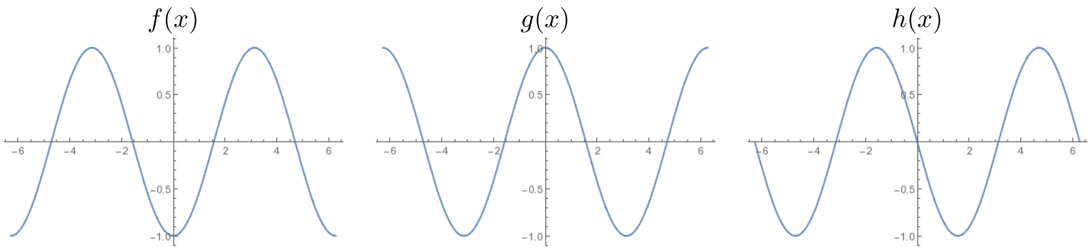
(b) $e^{1/x} = o(x^{-n})$ für $x \to 0^+$

(c) $x^{-n} = o(e^{1/x})$ für $x \to 0^+$

(d) $e^{\sqrt{\ln x}} = o\left(x^{1/3}\right)$ für $x \to +\infty$

(e) $\sin^2(x)\ln^3(x) = o\left(\ln^3(x)\right)$ für $x \to +\infty$

2. Gegeben seien die folgenden Graphen von Funktionen



Welche drei der folgenden sechs Aussagen sind korrekt?

(a) $h' = g$

(b) $h' = -g$

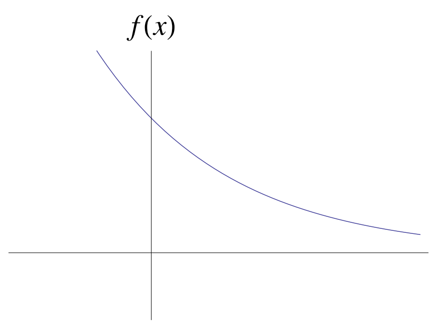
(c) $f' = h$

(d) $g' = h$

(e) $f'' = h$

(f) $f'' = g$

3. Die Figur zeigt den Graphen einer zweimal differenzierbaren Funktion f. Was lässt sich über f, f' und f'' sagen?



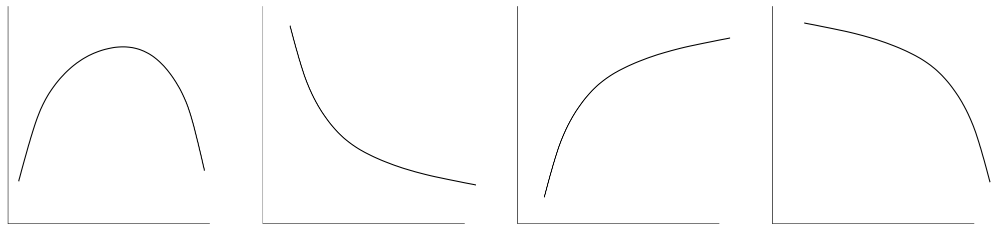
(a) Die erste Ableitung f' ist positiv.

(b) Die erste Ableitung f' ist negativ

(c) Die zweite Ableitung f'' ist negativ.

(d) Die zweite Ableitung f'' ist positiv.

4. Sei f eine Funktion mit $f'' < 0$. Welcher der folgenden Kurven könnten den Graphen G_f von f beschreiben?



I II III IV

(a) I

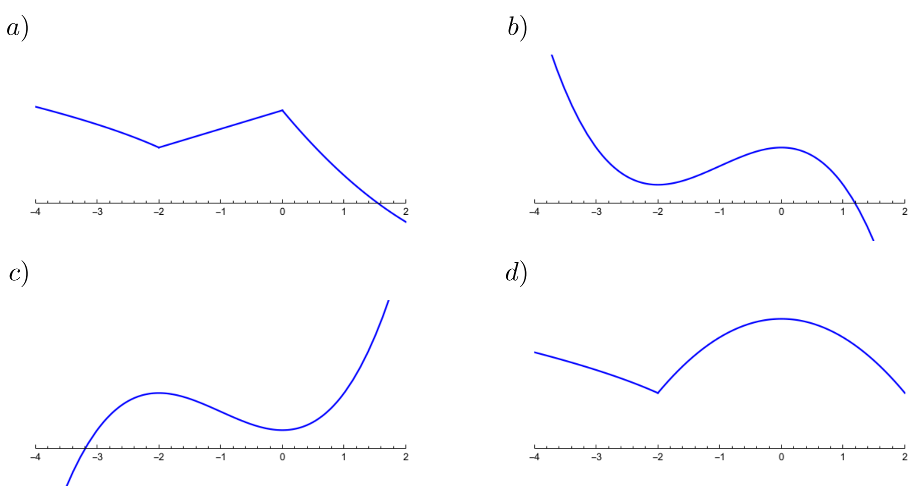
(b) II

(c) III

(d) IV

(e) Keine.

5. Gegeben sind die folgende Funktionen:



Welche der folgenden Aussagen sind *richtig*?

(a) Alle Funktionen a)-d) sind differenzierbar.

(b) Falls die zweite Ableitung der Funktionen b) und c) existiert, dann hat sie jeweils mindestens eine Nullstelle.

(c) Jede der Funktionen a)-d) hat eine Stelle mit verschwindender Ableitung.

(d) Die Funktion c) ist konvex.

Bitte wenden!

2. Man ordne die folgenden Funktionen nach der Stärke, mit der sie für $x \to +\infty$ nach $+\infty$ streben.

a) $\ln\big(\ln(x^2)\big)$ b) $\ln\big(e^x - x\big)$ c) x^2

d) $x^{1/5}$ e) $\ln\big(10\,x^{1/2}\big)$ f) e^{3x}

3. Für welche der untenstehenden Funktionen $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt $g(x) = O(e^x)$ mit $x \to +\infty$ und für welche gilt $e^x = O(g(x))$ mit $x \to +\infty$? (*Zur Erinnerung:* Es gilt $g(x) = O(f(x))$ mit $x \to +\infty$ falls $\lim\limits_{x\to+\infty} |\frac{g(x)}{f(x)}| \leq A$, wobei $A \in [0, +\infty)$ eine nicht-negative reelle Zahl ist.)

a) $g(x) = e^{x+4}$;

b) $g(x) = e^x + 17x^{17}$;

c) $g(x) = e^{x^2}$;

d) $g(x) = 200e^{\frac{1}{x^3}}$;

e) $g(x) = x^x$.

4. Gegeben sei die Funktion

$$f:\ x \longmapsto x^{3/2}(x-2)^3$$

a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich und Nullstellen von f.

b) Wo ist f monoton wachsend? Monoton fallend? Bestimmen Sie die lokalen Extrema von f, falls vorhanden, und unterscheiden Sie Minima und Maxima. Besitzt f globale Extrema?

c) Bestimmen Sie den Wertebereich von f.

d) Wo ist f konvex? Wo ist f konkav? Bestimmen Sie eventuelle Wendepunkte von f.

e) Mit der oben bestimmten Information skizziere man den Graphen von f.

5. Es sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion, so dass

$$f\big((1-t)x_1 + tx_2\big) \leq (1-t)\, f(x_1) + t\, f(x_2) \tag{1}$$

für alle $x_1, x_2 \in (a,b)$ und $t \in [0,1]$. Das Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass f konvex ist.

a) Was bedeutet die Ungleichung (1) geometrisch? Begründe mittels einer Skizze in der Abbildung 1 auf der nächsten Seite.

b) Zeige, dass gilt

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

für alle $x_1 < x < x_2$ wobei $x, x_1, x_2 \in (a,b)$. (*Hinweis*: Setze $t = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$.)

c) Benutze Teilaufgabe b) um zu zeigen, dass die Funktion f' monoton wachsend ist.

d) Wieso ist f konvex?

e)* Zeige unter Verwendung des Mittelwertsatzes, dass jede zweimal differenzierbare *konvexe* Funktion $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ die Ungleichung (1) erfüllt.

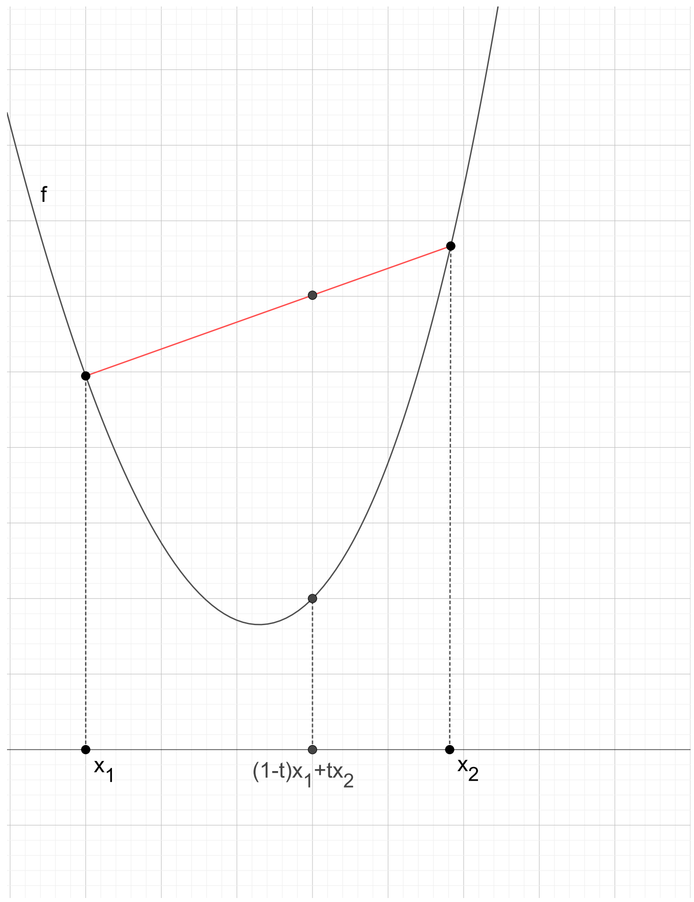


Abbildung 1: Figur zu Teilaufgabe a)