D-HEST

Prüfung Mathematik III, Winter 2016

Prof. Dr. E. W. Farkas

Viel Erfolg!

1. Laplace-Transformation

Im Folgenden bezeichne:

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

die Laplace-Transformierte einer gegebenen Funktion f, sofern das Integral existiert und endlich ist.

a) Wie lautet die Laplace-Transformation von:

$$f(t) = \sigma(t-1)\cos(t-1) + e^t$$

wobei $\sigma(u) = 1$ für $u \geq 0$ und $\sigma(u) = 0$ für $u < 0$.

b) Bestimmen Sie unter Verwendung des Faltungssatzes die Originalfunktion $h(t)$ zu:

$$\frac{1}{s(s-a)^2}, \quad \text{mit} \quad a \in \mathbb{R},$$

das heisst, bestimmen Sie die Funktion $h(t)$ mit $\mathcal{L}\{h\}(s) = \frac{1}{s(s-a)^2}$.

c) Für gegebene $A, B \in \mathbb{R}$ seien die Funktionen $x_1(t), x_2(t)$ Lösungen des Differentialgleichungssystems:

$$\begin{aligned} x_1' &= -x_2(t) \\ x_2' &= -x_1(t) \end{aligned}$$

zu den Anfangsbedingungen $x_1(0) = A$, $x_2(0) = B$, wobei $x_i'(t) = dx_i(t)/dt$ für $i = 1, 2$ die Ableitung nach t bezeichnet.

- Seien $F_i = \mathcal{L}\{x_i\}$ für $i = 1, 2$. Bestimmen Sie F_1 in Abhängigkeit von s, A und B.
- Bestimmen Sie durch Rücktransformation die Funktion $x_1(t)$.
  Hinweis: Machen Sie eine Partialbruchzerlegung.

Bitte wenden!

2. Fourier Reihen

Die Funktion $g(x)$ auf dem Intervall $x \in [-1, 1[$ sei gegeben als:

$$g(x) := \begin{cases} 2x + x^2 & -1 \leq x < 0 \\ 2x - x^2 & 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

und die Funktion $h(x)$ auf dem selben Intervall als:

$$h(x) := \begin{cases} -2x - x^2 & -1 \leq x < 0 \\ 2x - x^2 & 0 \leq x < 1\,. \end{cases}$$

Weiter ist die reelle Fourier-Reihe einer Funktion $f(x)$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

mit $a_0, a_n, b_n \in \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, dass die Funktion g ungerade und die Funktion h gerade ist.

b) Was können Sie jeweils über die Koeffizienten a_n, b_n der reellen Fourier-Reihen einer geraden beziehungsweise ungeraden Funktion aussagen?

c) Berechnen Sie die Koeffizienten der reellen Fourier-Reihen beider Funktionen.

Die komplexe Darstellung der Fourier-Reihe einer Funktion $f(x)$ schreibt sich:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{in\omega x}$$

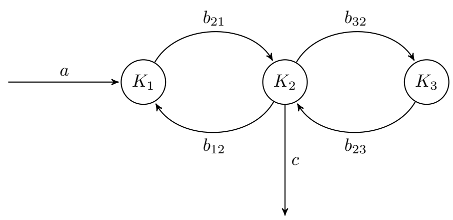
mit $c_n \in \mathbb{C}$.

d) Bestimmen Sie im Folgenden die Koeffizienten c_n der komplexen Fourier Reihen von g und h.

Siehe nächstes Blatt!

3. Kompartiment-Modell

Gegeben seien die drei Teile K_1, K_2 und K_3, welche zu einem Kompartiment-Modell gehören:



Die Substanz in den einzelnen Teilen wird über die Zeit durch die Funktionen $y_1(t)$, $y_2(t)$ und $y_3(t)$ beschrieben.

a) Stellen Sie die Differentialgleichungen für die drei Funktionen y_1, y_2 und y_3 auf.

b) Das System lässt sich in Matrixform $\underline{y}' = \mathbf{A}\underline{y} + \underline{g}$ schreiben. Finden Sie die 3×3 Matrix $\mathbf{A}$ sowie den Vektor $\underline{g}$. Es sei $\underline{y} := [y_1, y_2, y_3]^T$.

Die Parameter haben folgende Werte: $b_{21} = 2$, $b_{12} = 2$, mit Zufluss $a = 3$ und Abfluss $c = 3$. Wir betrachten nun den Fall $b_{32} = 0$ und $b_{23} = 0$ wobei sich das Modell vereinfachen lässt.

c) Zeichnen Sie das simplere Kompartiment-Modell und beschriften Sie die Pfeile. Achten Sie auch auf die korrekte Pfeilrichtung. Formulieren Sie anschliessend das System von zwei Differentialgleichungen $\underline{z}' = \mathbf{C}\underline{z} + \underline{h}$, welches dieses Modell beschreibt. $\mathbf{C}$ ist eine 2×2 Matrix und $\underline{z} := [z_1, z_2]^T$.

d) Berechnen Sie die Eigenwerte λ_1, λ_2 und Eigenvektoren $\underline{\nu_1}$ und $\underline{\nu_2}$ der Matrix $\mathbf{C}$.

e) Berechnen Sie die Lösung $\underline{z}(t)$ des Differentialgleichungssystems für $t \geq 0$ zum Anfangswert $\underline{z}(0) = [0, 0]^T$. Nutzen Sie die Diagonalisierung der Matrix $\mathbf{C}$ um das System in zwei skalare Differentialgleichungen zu entkoppeln.

Bitte wenden!

4. Partielle Differentialgleichung

Wir betrachten einen offenen Draht mit Temperaturleitungsfähigkeit $D > 0$ und Länge 1 und suchen Lösungen der Wärmeleitungsgleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{für alle } 0 < x < 1,\ t > 0 \tag{1}$$

zu den Randbedingungen:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0 \qquad \text{für alle } t > 0. \tag{2}$$

a) Bestimmen Sie alle Lösungen von der Form $u(x,t) = X(x)T(t)$ der Wärmeleitungsgleichung (1) mit den Randbedingungen (2).

b) Die Temperatur zum Zeitpunkt $t = 0$ sei gegeben durch $u(x,0) = x$ für alle $0 \leq x \leq 1$. Bestimmen Sie für diese Anfangswerte durch Superposition der gefundenen Lösungen aus a) die Lösung zur Wärmeleitungsgleichung (1) mit den Randbedingungen (2).

c) Zeigen Sie: $\int_0^1 u(x,t)dx$ ist konstant für alle $t \geq 0$, das heisst, die Wärme im Draht bleibt zeitlich konstant.