1.1. Lineare ODE mit konstanten Koeffizienten. Finden Sie die allgemeine Lösung folgender Differentialgleichungen:

(a) $y'' - \omega^2 y = 0$,

(b) $y'' + \omega^2 y = 0$,

(c) $y'' + 3y' + 4y = \cos(2x)$,

(d) $y^{(4)} + 2y^{(3)} - 2y'' + 8y = \mathrm{e}^{-2x}$.

1.2. ODE 1. Ordnung mit variablen Koeffizienten. Lösen Sie die folgende Differentialgleichungen für $y(x)$:

(a) $y' - x^2 y = 0$, $x \in \mathbb{R}$,

(b) $y' - y/x = x$, $x > 0$,

(c) $y' + x^5 y = x^6 + 1$, $x \in \mathbb{R}$,

(d) $y' = (x + y)^2$,

(e) $y' - y = \sin x$,

(f) $y' = \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}$,

(g) $y\,y' - (1 + y)x^2 = 0$.

Erinnerung: ODE 1. Ordnung löst man oft durch *Trennung der Variablen* oder durch Substitution.

Hinweis für (c): mult. die Gleichung mit $\mathrm{e}^{f(x)}$, wobei f eine geeignete Funktion ist.

Bemerkung für (d): y wird sich nicht explizit als Funktion von x schreiben lassen. Es seicht aus, wenn Sie eine Relation zwischen der Funktion y und der Variablen x finden, die keine Ableitungen enthält.

1.3. Anfangswert- und Randwertprobleme. Lösen Sie die folgende Probleme:

(a) $$\begin{cases} y' &= 2\mathrm{e}^{2x} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \\ y(0) &= 2. \end{cases}$$

(b) $$\begin{cases} y''(x) + 4y(x) &= 0 \quad \forall x \in (0, L) \ (L > 0 \text{ gegeben}), \\ y(0) &= 0, \\ y(L) &= 2. \end{cases}$$

1.4. Federpendel Ein Federpendel besteht aus einer Schraubenfeder und einem daran befestigten Massestück (mit Masse m), welches sich geradlinig längs der Richtung bewegen kann, in der Feder sich verlängert oder verkürzt. Sei $K > 0$ die Federkonstante und $\omega^2 := K/m$. Dann ist die Bewegungsgleichung des Federpendels gegeben durch

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0. \tag{1}$$

Bestimme die Lösung der Differentialgleichung (1):

(a) welche die Anfangsbedingungen $x(0) = 1, \dot{x}(0) = 2\omega$ erfüllt.

(b) welche die Randbedingungen $x(0) = 1, x(\frac{\pi}{2\omega}) = 1$ erfüllt.